D^{r} WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMJI UMIEJĘTNOŚCI

ZARYS
TEORJI MNOGOŚCI

CZĘŚĆ PIERWSZA. LICZBY POZASKOŃCZONE

WYDANIE DRUGIE, ZMIENIONE

WYDAWNICTWO KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM IMIENIA J. MIANOWSKIEGO
WARSZAWA — MCMXXIII
= PAŁAC STASZICA. =

D[R] WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMJI UMIEJĘTNOŚCI

ZARYS
TEORJI MNOGOŚCI

CZĘŚĆ PIERWSZA. LICZBY POZASKOŃCZONE

WYDANIE DRUGIE, ZMIENIONE

WYDAWNICTWO KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM IMIENIA J. MIANOWSKIEGO
WARSZAWA — MCMXXIII
= PAŁAC STASZICA. =

DRUKARNIA NAKŁADOWA — WARSZAWA,
HORTENSJA № 7—TELEFONY: 216-60, 189-58.

PRZEDMOWA DO 2-GO WYDANIA.

W ostatniej ćwierci ubiegłego stulecia powstała nauka, która, mimo krótkiego czasu swego istnienia, zdołała już zająć pierwszorzędne stanowisko wśród różnych działów Matematyki. Jest nią *Teorja mnogości.*

Twórcą Teorji mnogości jest G. Cantor (1845—1918), który sam, w latach 1869—1897, zbudował cały niemal szkielet tej nauki; pewne atoli pojęcia, któremi teorja mnogości operuje, zostały przygotowane przez innych uczonych XIX-go wieku, jako to: Bolzano, Weierstrassa, Fouriera, Dirichleta, Riemann'a, Hankela, du-Bois-Reymonda.

Śmiało rzec można, że cała niemal współczesna Analiza matematyczna jest przesiąknięta Teorją mnogości; nauka ta przyczyniła się do wyświetlenia i zgłębienia tylu różnych kwestyj i zagadnień podstawowych, że dzisiaj wykład już nawet początków Matematyki wyższej obyć się bez niej nie może. Zarówno też z filozoficznego punktu widzenia, analizując pojęcie *nieskończoności*, Teorja mnogości przedstawia niemały interes, a różne jej paradoksy i t. zw. *antynomje* wciąż jeszcze nie dają logikom spokoju. Niektóre znowu zagadnienia i wyniki Teorji mnogości są tak proste i łatwe do wyłożenia, a z drugiej strony posiadają tyle pierwiastków kształcących, że śmiało mogą być zaliczone do minimum tych wiadomości, które stanowią tak zwane wykształcenie ogólne.

Celem niniejszego *Zarysu Teorji mnogości* jest zaznajomienie czytelnika w sposób możliwie przystępny z ważniejszymi zagadnieniami i wynikami Teorji mnogości, oraz przygotowanie go do dalszych, samodzielnych studjów i ewentualnej pracy badawczej w tej dziedzinie. Do rożumienia tej książki wystarcza, poza zdolnością do abstrakcyjnego myślenia, znajomość kursu matematyki elementarnej (w zakresie szkoły średniej): studjowanie jej można więc rozpocząć już w każdym razie w pierwszym roku nauki uniwersyteckiej.

Od czasu pierwszego wydania tej książki (w r. 1912) upłynęło przeszło lat dziesięć. Pomimo, że warunki ubiegłego dziesięciolecia nie sprzyjały rozwojowi nauk matematycznych, Teorja mnogości poczyniła w tym czasie duże postępy. Niejeden dawny wynik zgłębiono i uzupełniono, sporo dowodów uproszczono, parę ważnych pojęć wprowadzono, wiele nowych rezultatów osiągnięto. W Polsce powstało w r. 1920-tym, z inicjatywy przedwcześnie zgasłego ś. p. Zygmunta Janiszewskiego, czasopismo *Fundamenta Mathematicae*, poświęcone głównie teorji mnogości oraz jej zastosowaniom: z dziedzin tych zawierają pierwsze cztery tomy tego wydawnictwa przeszło sto prac autorów polskich i obcych, wśród których znajdują się prace tak wybitnych uczonych współczesnych, jak Lebesgue, Fréchet, Łuzin, Hahn, R. L. Moore i inni.

To też, chcąc dostosować nowe wydanie *Zarysu teorji mnogości* do współczesnego stanu tej nauki, musiałem prawie zupełnie zmienić i kilkakrotnie powiększyć wydanie poprzednie. Książka niniejsza stanowi pierwszą część nowego wydania *Zarysu*, obejmującą teorję liczb kardynalnych, oraz teorję liczb porządkowych; część druga zawierać będzie teorję mnogości punktowych (wraz z topologją i metryką).

Od roku 1908 czynione były próby *aksjomatyzacji* teorji mnogości (Zermelo, Schoenflies, Leśniewski, Fraenkel); ponieważ jednak aksjomatyka teorji mnogości nie została jeszcze podaną w postaci ostatecznej, i ponieważ metoda aksjomatyczna, zdaniem mojem, do wykładu początkowego teorji mnogości nie bardzo się nadaje, więc nie zastosowałem jej w niniejszym kursie; omówię ją natomiast przy końcu drugiej części Zarysu. Nie uważałem też z różnych względów za stosowne poruszać w toku kursu różnych *antynomji*, których omówienie również odkładam na koniec podręcznika.

Osobny rozdział poświęciłem w nowem wydaniu *Zarysu* tak zwanemu *pewnikowi wyboru* (Zermelo), przyczem starałem się oświetlić sprawę zarówno ze stanowiska idealistów, jakoteż z punktu widzenia empirystów, nie narzucając zresztą czytelnikowi żadnego z tych poglądów.

W wydaniu niniejszem wyłożyłem dość szczegółowo arytmetykę liczb pozaskończonych, oraz teorję tak zwanych *alefów*. Ostatni wreszcie rozdział 1-ej części Zarysu poświęciłem słynnemu twierdzeniu Zermelo.

Kończąc, spełnię miły obowiązek, wyrażając na tem miejscu podziękowanie Komitetowi Kasy imienia d-ra J. Mianowskiego za wydanie tej książki. Dziękuję wreszcie Drukarni Nakładowej za szybkie i staranne wykonanie roboty drukarskiej.

Warszawa, w marcu 1923 r. *W. Sierpiński.*

TREŚĆ.

A. Ogólna teorja mnogości.

Rozdział I. Ogólne własności zbiorów.

Rozdział II. Moce zbiorów i liczby kardynalne.

Rozdział III. Zbiory przeliczalne.

Rozdział IV. Mnogości mocy continuum.

Rozdział V. Porównywanie mocy zbiorów.

Rozdział VI. Pewnik wyboru i jego zastosowania.

B. Teorja mnogości uporządkowanych.

Rozdział VII. Typy porządkowe.

Rozdział VIII. Działania na typach porządkowych.

Rozdział IX. Zbiory dobrze uporządkowane.

Rozdział X. Arytmetyka liczb porządkowych.

Rozdział XI. Klasy liczbowe i alefy.

Rozdział XII. Twierdzenie Zermelo i jego zastosowania.

A. Ogólna teorja mnogości.

ROZDZIAŁ I.

Ogólne własności zbiorów.

§ **1.** Przedmiotem badań Teorji mnogości są *zbiory*. Pojęcie *zbioru* nie daje się określić zapomocą innych, prostszych pojęć, lecz każdy z nas rozumie, co to jest zbiór jakichś przedmiotów, np. zbiór ludzi, znajdujących się w tym pokoju; zbiór książek, tworzących daną bibljotekę; zbiór liter alfabetu polskiego; zbiór wszystkich (lub niektórych) liczb wymiernych; zbiór punktów płaszczyzny; zbiór wielomianów całkowitych i t. p. Wśród zbiorów mamy więc wielką rozmaitość: możemy mówić o zbiorach przedmiotów materjalnych, o zbiorach pojęć; możnaby nawet mówić o zbiorach zbiorów. Zamiast wyrazu „zbiór“ używamy też wyrazu „mnogość“.

§ **2.** Przedmioty, tworzące dany zbiór, nazywamy jego *elementami*. Dla wyrażenia na piśmie, że przedmiot p jest elementem mnogości M, używamy (według G. Peano) wzoru

$$p \varepsilon M.$$

Zbiór, którego elementami są przedmioty $a, b, c, \ldots, l$, będziemy oznaczali przez $(a, b, c, \ldots, l)$. Więc np. (a, b) oznacza zbiór, utworzony z dwóch elementów, któremi są przedmioty a i b. Symbole (a, b) i (b, a) oznaczają ten sam zbiór. *Zbiór nie zależy od porządku elementów.*

Zgodnie z umówionem znakowaniem, (a) oznacza zbiór, złożony z jednego tylko elementu, którym jest przedmiot a. Może się komu wydawać, że niema zbioru (mnogości) tam, gdzie jest jeden tylko przedmiot. Chodzi tu oczywiście tylko o terminologję, lecz gdybyśmy chcieli stać na takiem stanowisku (że każdy zbiór zawiera conajmniej dwa elementy), to pociągnęłoby to za sobą szereg niedogodności, zwłaszcza przy formułowaniu różnych twierdzeń o zbiorach. Drugie pytanie, które się tu nasuwa, to pytanie, czy zbiór złożony z jednego tylko elementu mamy uważać za identyczny ze swym elementem, czy też nie? Innemi słowy, czy zachodzi tożsamość $(a) = a$? Na pierwszy rzut oka wydawałoby się może, że rozróżnianie między zbiorem, złożonym z jednego tylko elementu, którym jest przedmiot a, oraz samym przedmiotem a, jest zbyteczne. Okazuje się jednak, że przyjęcie tożsamości $(a) = a$ doprowadza do sprzeczności [1]. Musimy więc mnogość, złożoną z jednego tylko elementu, uważać jako różną od tego elementu.

§ **3.** Aby zbiór był określonym, potrzeba i wystarcza, iżby co do każdego przedmiotu p było rzeczą ustaloną, czy przedmiot ten należy, czy też nie należy do uważanego zbioru. (Wyniką stąd nietylko, że daną jest mnogość, jeżeli dane są jej elementy, lecz i naodwrót: jeżeli daną jest mnogość, to dane są przez to i jej elementy. Każdy zbiór posiada przytem tylko te elementy, z których jest utworzony: np. elementem zbioru (a, b, c) nie może być żaden przedmiot, różny od a, b lub c). Nie jest przytem wymaganem, abyśmy w stosunku do każdego danego przedmiotu p potrafili (teoretycznie chociażby) rozstrzygnąć, czy ma, czy też nie ma być zaliczony do danego zbioru [2]).

Zbiory możemy tworzyć z jakichkolwiek danych przedmiotów, które też same mogą być zbiorami. Np. z przedmiotów a, b, c, d, e możemy utworzyć dwa zbiory $P = (a, b)$ oraz $Q = (c, d, e)$, z tych zaś

[1]) W samej rzeczy, niech M oznacza dowolną daną mnogość. Oznaczmy przez N mnogość, utworzoną z jednego tylko elementu, którym jest mnogość M, t. j. $N = (M)$. Jeżeli nie rozróżniamy między mnogością, złożoną z jednego tylko elementu, oraz tym elementem, to mnogości N oraz M musimy uważać jako ten sam przedmiot. Lecz w takim razie M, będąc elementem dla N, jest elementem mnogości $M = N$. Wynika stąd, że każda mnogość jest swoim własnym elementem, wbrew faktowi, że są mnogości, nie będące własnemi elementami, np. mnogość wszystkich liczb naturalnych. (Mnogość (a, b) też nie jest własnym elementem).

[2]) Np. zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest określony w zupełności, pomimo, że nie potrafimy dotąd rozstrzygnąć, czy liczba $2^{\sqrt{2}}$ do zbioru tego należy, czy też nie należy, ani też nie znamy żadnej metody, która mogłaby nas doprowadzić do rozstrzygnięcia tego pytania.

dwuch zbiorów, jako elementów, nowy zbiór $Z = (P, Q) = ((a,b), (c,d,e))$. Zbiór Z składa się więc z dwuch elementów: P i Q. Należy go odróżniać od zbioru $Z_1 = (a, b, c, d, e)$, otrzymanego przez połączenie w jeden zbiór wszystkich elementów zbioru P oraz wszystkich elementów zbioru Q. Zbiór Z_1 składa się z pięciu elementów: a, b, c, d, e: żaden z nich nie jest elementem zbioru Z. Natomiast a jest elementem elementu P zbioru Z. Zatem: *element elementu danego zbioru może nie być elementem tego zbioru.* Stosunek między dwoma przedmiotami, polegający na tem, że pierwszy z nich jest elementem drugiego, *nie jest* więc stosunkiem *przechodnim:* wzory $a \varepsilon P$ oraz $P \varepsilon Z$ nie pociągają za sobą wzoru $a \varepsilon Z$. W szczególnych atoli przypadkach element elementu danego zbioru może być jego elementem: np. a jest elementem zbioru (a, b) oraz zbioru $(a, (a, b))$, dla którego zbiór (a, b) jest elementem.

Jeden i ten sam przedmiot może być jednocześnie elementem różnych zbiorów: np. liczba 1 jest elementem zbioru liczb naturalnych, jakoteż zbioru liczb wymiernych, albo zbioru liczb rzeczywistych dodatnich. Zbiory mogą więc posiadać elementy *wspólne.*

Możnaby nazywać mnogością 1-go rzędu mnogość, której elementy same nie są zbiorami, mnogością 2-go rzędu — mnogość, nie będącą 1-go rzędu, której elementy bądź nie są zbiorami, bądź też są mnogościami 1-go rzędu, i t. d. Więc np. jeżeli przedmioty a, b, c, d, e nie są zbiorami, to (a, b, c) będzie mnogością 1-go rzędu, $(a, (b, c))$ oraz $((a))$ będą mnogości 2-go rzędu, $(a, (a), ((a)))$ oraz $((a, b), (c, (d, e)))$ — będą mnogości 3-go rzędu i t. d. Możnaby nawet rozważać mnogości rzędów nieskończonych, np. mnogość $(a, (a), ((a)), (((a))), \ldots)$.

§ 4. Jeżeli każdy element zbioru A jest zarazem elementem zbioru B, to mówimy, że zbiór A jest *częścią* zbioru B i wyrażamy to na piśmie wzorem:

$$A \subset B \quad \text{lub} \quad B \supset A.$$

Zamiast „część“ danego zbioru, mówimy nieraz „podmnogość“ danego zbioru.

Stosunek między zbiorami A i B, wyrażony znakiem $\subset$ nazywamy stosunkiem *zawierania* (inkluzji). Wzór $A \subset B$ można czytać: zbiór A jest zawarty w zbiorze B. Stosunek zawierania jest, jak łatwo widzieć, *przechodni,* t. j. wzory:

$$A \subset B \quad \text{oraz} \quad B \subset C$$

pociągają za sobą zawsze wzór:

$$A \subset C.$$

Mamy też, dla każdego zbioru A, wzór:

$$A \subset A.$$

Jeżeli zbiór A jest częścią zbioru B, a zarazem zbiór B jest częścią zbioru A, to znaczy, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i naodwrót, czyli, że zbiory A i B składają się z tych samych elementów. O zbiorach takich mówimy, że są *identyczne* i piszemy wówczas:

$$A = B \quad \text{lub} \quad B = A.$$

Wzory:

$$A \subset B \quad \text{oraz} \quad B \subset A$$

pociągają więc za sobą zawsze wzór:

$$A = B$$

(i, oczywiście, naodwrót).

Dla wyrażenia, że dwa zbiory A i B nie są identyczne, piszemy niekiedy:

$$A \neq B.$$

Jeżeli zbiór A jest częścią zbioru B, lecz nie naodwrót, to mówimy, że zbiór A jest częścią *właściwą* zbioru B. Na to więc, aby zbiór A był częścią właściwą zbioru B, potrzeba i wystarcza, iżby było jednocześnie:

$$A \subset B \quad \text{oraz} \quad A \neq B;$$

w zbiorze B istnieje wówczas conajmniej jeden taki element, którego niema w zbiorze A.

Np. częściami właściwemi zbioru (a, b, c) są zbiory

$$(a), (b), (c), (a, b), (a, c), (b, c).$$

Łatwo widzieć, że zbiór, złożony z n elementów, posiada $2^n - 2$ części właściwe.

Wzór

$$p \,\varepsilon\, M$$

jest, jak łatwo widzieć, równoważny wzorowi

$$(p) \subset M.$$

§ **5.** Jeżeli A i B są dane zbiory, to zbiór, utworzony ze wszystkich tych i tylko tych elementów, które należą conajmniej do jednego ze zbiorów A i B, nazywamy *sumą* tych zbiorów i oznaczamy przez $A + B$.

Zbiór, utworzony ze wszystkich tych, i tylko tych elementów, które należą jednocześnie do A i do B, nazywamy *iloczynem* zbiorów A i B i oznaczamy przez $A \times B$, $A \,.\, B$, lub poprostu AB.

Zbiór, utworzony ze wszystkich tych, i tylko tych elementów zbioru A, które nie należą do B, nazywamy *różnicą* zbiorów A i B i oznaczamy przez $A - B$.

Pojęcie sumy i iloczynu daje się z łatwością uogólnić na dowolną skończoną, a nawet nieskończoną ilość zbiorów. Ogólniej, niech M oznacza jakąkolwiek daną mnogość, której elementami są zbiory, które oznaczamy przez Z. Nazywamy *sumą* zbiorów Z, tworzących mnogość M, zbiór S, utworzony ze wszystkich tych i tylko tych elementów, które należą conajmniej do jednego ze zbiorów Z, tworzących mnogość M. *Iloczynem* zbiorów Z, tworzących mnogość M, nazywamy zbiór wszystkich tych elementów, które należą do każdego ze zbiorów Z, tworzących mnogość M.

W szczególności, gdy mnogość M składa się z ciągu (skończonego lub nieskończonego) [1]) zbiorów Z_1, Z_2, Z_3, ..., oznaczamy sumę S oraz iloczyn P zbiorów Z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) odpowiednio przez

$$S = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots, \quad \text{oraz} \quad P = Z_1 Z_2 Z_3 \ldots.$$

Każda mnogość zbiorów posiada oczywiście oznaczoną sumę. Aby to samo można było powiedzieć o iloczynie i różnicy, musimy wprowadzić *zbiór pusty*, który oznaczać będziemy przez 0. Więc np. wzór

$$AB = 0,$$

wyraża, że zbiory A i B nie posiadają żadnego elementu wspólnego, wzór

$$A - B = 0$$

— że zbiór A jest zawarty w zbiorze B.

Wygodnie jest uważać zbiór pusty jako część każdego zbioru: umowa taka pozwala na formułowanie różnych ogólnych twierdzeń, np. twierdzenia, że *iloczyn zbiorów jest częścią każdego z czynników*. (Inaczej nie możnaby było tego powiedzieć np. o iloczynie dwóch zbiorów, nie mających elementów wspólnych). Zresztą umowa, że $0 \subseteq Z$ dla każdego zbioru Z, jest zgodna z definicją części ($A \subseteq B$ znaczy: jeżeli jakiś przedmiot p jest elementem zbioru A, to p jest elementem zbioru B).

Skoro mówimy, że dany zbiór Z *nie jest pusty*, to chcemy przez to wyrazić, że istnieje conajmniej jeden przedmiot, który jest elementem zbioru Z.

---

[1]) Mówimy, że mamy określony *ciąg nieskończony* przedmiotów, jeżeli każdej liczbie naturalnej n przyporządkowany jest pewien przedmiot p_n.

§ **6.** Suma oraz iloczyn dowolnej mnogości zbiorów posiadają oczywiście własność *przemienności* oraz *łączności* składników, względnie czynników. Mamy więc np. wzory:

$$A + B = B + A,$$
$$AB = BA,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

dla wszelkich zbiorów A, B, C. Podobnież suma i iloczyn większej, nawet nieskończonej ilości zbiorów, nie zależą od porządku lub ugrupowania składników, względnie czynników.

Suma i iloczyn zbiorów posiadają też własność *rozdzielności:* mamy zawsze:

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Łatwy dowód tego wzoru pozostawiamy czytelnikowi. (Dla dowodu należy, powołując się na definicje sumy i iloczynu zbiorów, wykazać, że każdy element zbioru, stojącego po lewej stronie wzoru, jest elementem zbioru, stojącego po prawej stronie wzoru, jakoteż naodwrót).

Zauważymy, że nietylko mnożenie zbiorów jest rozdzielnem względem dodawania, lecz i naodwrót: dodawanie jest rozdzielnem względem mnożenia, mianowicie mamy zawsze:

$$AB + C = (A + C)\,(B + C).$$

Ponieważ dodawanie i mnożenie zbiorów podlegają prawom przemienności, łączności i rozdzielności, więc, jak łatwo widzieć, wszystkie prawidła rachunku algebraicznego na wielomianach o składnikach dodatnich stosowalne są też do wielomianów, utworzonych ze zbiorów. Zauważymy jeszcze, że wzory:

$$Z + Z = Z \quad \text{oraz} \quad Z.Z = Z$$

(zachodzące dla każdego zbioru Z) pozwalają na upraszczanie wzorów, zawierających składniki podobne lub potęgi zbiorów.

Przy upraszczaniu wzorów korzystamy też z t. zw. praw *absorpcji* dla zbiorów:

$$A + AB = A, \qquad A\,(A + B) = A$$

— dla wszelkich zbiorów A i B.

Z definicji sumy zbiorów wynika natychmiast, że każdy zbiór $Z = (a, b, c, \ldots)$ może być uważany, jako suma zbiorów (a), (b), (c), ..., z których każdy składa się z jednego tylko elementu:

$$Z = (a) + (b) + (c) + \ldots.$$

(co oczywiście nie znaczy, że każdy zbiór jest sumą swych elementów). Łatwo też widzieć, że każdy zbiór jest sumą wszystkich swoich części.

Łatwo widzieć, że jeżeli

$$A_n \subset B_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

to

$$A_1 + A_2 + \ldots \subset B_1 + B_2 + \ldots \quad \text{oraz} \quad A_1 A_2 \ldots \subset B_1 B_2 \ldots$$

(prawo dodawania i mnożenia stronami stosunków zawierania, jednego sensu).

Zauważymy jeszcze, że wzór $A \subset B$ jest równoważny równości $A = AB$ jakoteż równości $A + B = B$, zaś równość $A = B$ jest równoważna równości $AB = A + B$. Wzór $A \subset B \subset C$ jest równoważny równości $A + B = BC$.

Dla wszelkich zbiorów A, B, C mamy, dalej, wzory:

$$A - (B + C) = (A - B) - C,$$
$$(A - B) C = AC - BC,$$
$$(A + B) - C = (A - C) + (B - C), \text{ [1]}$$
$$AB - C = (A - C)(B - C) \text{ [2]}.$$

Warto, dalej, zauważyć, że mnożenie zbiorów daje się sprowadzić do dodawania i odejmowania: mamy mianowicie:

$$AB = A - (A - B)$$

i, ogólniej:

$$A_1 A_2 A_3 \ldots = A_1 - [(A_1 - A_2) + (A_1 - A_3) + \ldots]$$

dla każdego skończonego lub nieskończonego ciągu zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Suma, której żadne dwa składniki nie mają elementów wspólnych, nazywa się *rozłączną* (dyzjunktywną). Sumę każdego skończonego lub nieskończonego ciągu zbiorów możemy z łatwością przekształcić na rozłączną, w myśl wzorów:

$$A + B = A + (B - A),$$
$$A + B + C = A + (B - A) + [C - (A + B)]$$

i t. d.

Ciąg różnych zbiorów $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ nazywamy *rosnącym*, jeżeli

$$Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset \ldots,$$

---

[1]) Prawo rozdzielności odejmowania względem dodawania.

[2]) Prawo rozdzielności odejmowania względem mnożenia.

zaś *malejącym*, jeżeli

$$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \ldots.$$

Suma każdego ciągu zbiorów (po ewentualnem opuszczeniu równych składników) może być zawsze zastąpiona przez sumę zbiorów rosnących, mianowicie, kładąc:

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = S_n, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

mamy

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots,$$

przyczem

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots.$$

Podobnież iloczyn każdego ciągu zbiorów (po ewentualnem opuszczeniu równych czynników) może być zastąpiony przez iloczyn zbiorów malejących, mianowicie, kładąc

$$Z_1 Z_2 \ldots Z_n = P_n, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

mamy

$$Z_1 Z_2 Z_3 \ldots = P_1 P_2 P_3 \ldots,$$

przyczem

$$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots.$$

Każdą różnicę zbiorów możemy zastąpić przez różnicę, w której odjemnik jest częścią odjemnej, w myśl wzoru:

$$A - B = A - AB.$$

Suma algebraiczna zbiorów nie posiada wogóle prawa łączności: np. jeżeli $C - A \neq 0$, to

$$(A - B) + C \neq A - (B - C),$$

zaś jeżeli $AC \neq 0$, to

$$A + (B - C) \neq (A + B) - C;$$

w szczególności więc, jeżeli $B - A \neq 0$, to

$$(A - B) + B \neq A.$$

Łatwo widzieć, że równości zbiorów mogą być dodawane, odejmowane i mnożone stronami, podobnie jak równości liczbowe.

§ **7.** Jeżeli $B \subset A$, to różnicę $A - B$ nazywamy *dopełnieniem* (albo *uzupełnieniem*) zbioru B do zbioru A. Przy badaniu podmnogości Z tego samego zbioru A, dopełnienia ich do A oznaczamy przez $C(Z)$, lub poprostu CZ (C — pierwsza litera francuskiego wyrazu: *complémentaire*).

Mamy, jak łatwo widzieć (dla wszelkich podmnogości zbioru, względem którego bierzemy dopełnienia):

$$Z \,.\, \mathrm{C}\, Z = 0, \quad \mathrm{C}\,(\mathrm{C}\, Z) = Z,$$
$$\mathrm{C}\,(Z_1 Z_2) = \mathrm{C}\, Z_1 + \mathrm{C}\, Z_2,$$
$$\mathrm{C}\,(Z_1 + Z_2) = \mathrm{C}\, Z_1 \,.\, \mathrm{C}\, Z_2.$$

Zatem: *dopełnienie iloczynu jest sumą dopełnień, dopełnienie sumy jest iloczynem dopełnień* (twierdzenia De Morgana). Podobnież dla większej (skończonej lub nieskończonej) liczby składników lub czynników.

Odejmowanie oraz mnożenie zbiorów daje się sprowadzić zapomocą dopełnień do dodawania: mamy mianowicie wzory:

$$A - B = \mathrm{C}\,(\mathrm{C}\, A + B)$$
$$AB = \mathrm{C}\,(\mathrm{C}\, A + \mathrm{C}\, B).$$

Mamy, dalej:

$$\mathrm{C}\,(A - B) = \mathrm{C}\, A + B$$
$$A - B = A \,.\, \mathrm{C}\, B;$$

ostatni wzór dowodzi, że odejmowanie zbiorów sprowadza się, zapomocą dopełnień, do mnożenia.

Wzór

$$A \subset B$$

jest, jak łatwo widzieć, równoważny wzorowi:

$$\mathrm{C}\, A \supset \mathrm{C}\, B;$$

stąd, oraz ze wzorów De Morgana wynika natychmiast *zasada dwoistości*, w myśl której, z każdej równości między zbiorami, otrzymanej przez dodawanie i mnożenie zbiorów, wyprowadzamy drugą równość, zastępując wszędzie dane zbiory przez ich dopełnienia, oraz dodawanie przez mnożenie i naodwrót, z każdej zaś inkluzji dla zbiorów otrzymujemy w podobny sposób drugą inkluzję, zastępując nadto znak $\subset$ przez znak $\supset$ i naodwrót. W szczególności, z tożsamości dla zbiorów (t. j. równości, zachodzącej dla wszelkich zbiorów), otrzymanej zapomocą dodawań i mnożeń zbiorów, wyprowadzamy drugą tożsamość, nawet bez uciekania się do dopełnień, zastępując jedynie dodawania przez mnożenia i naodwrót. Np. tożsamość $(A + B)C = AC + BC$ daje w ten sposób: $AB + C = (A + C)(B + C)$; z tożsamości $(A - B)\, C = AC - BC$ nie wynika jednak tożsamość $(A - B) + C = (A + C) - (B + C)$.

§ **8.** Jeżeli każdemu elementowi x zbioru Z przyporządkowaną jest liczba rzeczywista $f(x)$, to mówimy, że mamy *funkcję* rzeczywistą $f(x)$, określoną w zbiorze Z.

Przy badaniu podmnogości P danego zbioru Z nazywamy *funkcją charakterystyczną* zbioru P funkcję $\varphi(x)$, równą jedności dla każdego elementu x zbioru P, oraz równą zeru dla każdego elementu x dopełnienia zbioru P (t. j. dla każdego $x \varepsilon Z - P$).

Łatwo widzieć, że funkcja charakterystyczna posiada następujące własności:

Jeżeli φ jest funkcją charakterystyczną zbioru P, to $1 - \varphi$ jest funkcją charakterystyczną zbioru CP.

Jeżeli $P_1, P_2, P_3, \ldots$ jest ciągiem skończonym lub nieskończonym zbiorów, nie mających elementów wspólnych, których funkcjami charakterystycznemi są odpowiednio $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, to funkcją charakterystyczną zbioru $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ jest $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$.

Jeżeli $P_1, P_2, P_3, \ldots$ jest dowolnym ciągiem zbiorów (mogących nawet posiadać elementy wspólne), których funkcjami charakterystycznemi są $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, to funkcją charakterystyczną zbioru $P = P_1 P_2 P_3 \ldots$ jest $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots$.

Łatwo, dalej, obliczyć funkcję charakterystyczną sumy zbiorów w przypadku ogólnym. Niech $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ będzie sumą zbiorów, mogących posiadać elementy wspólne. W myśl twierdzenia De Morgana, mamy:

$$CP = CP_1 \,.\, CP_2 \,.\, CP_3 \ldots \tag{1}$$

Jeżeli funkcją charakterystyczną zbioru P_n jest φ_n, to funkcją charakterystyczną zbioru CP_n jest $1 - \varphi_n$, zatem, w myśl wzoru (1) (ponieważ funkcją charakterystyczną iloczynu jest zawsze iloczyn funkcji charakterystycznych), funkcją charakterystyczną zbioru CP będzie:

$$(1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2)(1 - \varphi_3) \ldots,$$

i przeto funkcją charakterystyczną zbioru P (jako dopełnienia zbioru CP, jest:

$$1 - (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2)(1 - \varphi_3) \ldots.$$

§ **9.** Niech

$$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots \tag{2}$$

oznacza dowolny ciąg nieskończony zbiorów.

Zbiór wszystkich tych przedmiotów, które są elementami nieskończenie wielu z pośród zbiorów (2), nazywamy *granicą górną* ciągu Z i oznaczamy przez:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} Z_n$$

(według de la Vallée Poussin'a, lub przez $\limsup\limits_{n} Z_n$ według Hausdorff'a), zaś zbiór wszystkich tych przedmiotów, które są elementami wszystkich zbiorów ciągu (2) z wyjątkiem skończonej ich liczby, nazywamy *granicą dolną* ciągu Z_n i oznaczamy przez:

$$\underline{\lim}_{n=\infty} Z_n \quad (\text{lub } \liminf Z_n).$$

Dla każdego danego ciągu nieskończonego zbiorów (2) granice górna i dolna są więc określonemi zbiorami (które, zresztą, mogą być próżne), przyczem, jak łatwo widzieć, mamy zawsze:

$$\underline{\lim}_{n=\infty} Z_n \subset \overline{\lim}_{n=\infty} Z_n .$$

Łatwo też sprawdzić następujące tożsamości:

$$\overline{\lim} Z_n = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots)(Z_2 + Z_3 + \ldots)(Z_3 + \ldots)\ldots,$$
$$\underline{\lim}_{n=\infty} Z_n = Z_1 Z_2 Z_3 \ldots + Z_2 Z_3 \ldots + Z_3 Z_4 \ldots + \ldots .$$

ROZDZIAŁ II.

Moce zbiorów i liczby kardynalne.

§ **10.** Weźmy pod uwagę jakiekolwiek dwa zbiory i oderwijmy myśl naszą od *porządku* oraz *jakości* ich elementów. Jeżeli, po takiem abstrahowaniu, zbiory nasze już niczem się nie różnią, to mówimy, że są one *równej mocy;* w przeciwnym przypadku mówimy, że *moce ich są różne* [1]).

Pojęcie *mocy* jest więc uogólnieniem pojęcia *liczności,* jeżeli to ostatnie zechcemy stosować też względem zbiorów nieskończonych [2]). Sama już intuicja wskazuje, że nie wszystkie zbiory nieskończone są równej mocy. Weźmy np. pod rozwagę następujące zbiory:

A) Zbiór wszystkich liczb dodatnich parzystych,
B) „ „ „ naturalnych,
C) „ „ „ wymiernych,
D) „ „ „ rzeczywistych,
D') „ „ punktów danej prostej,
E) „ „ „ „ płaszczyzny,
F) „ „ „ przestrzeni,
G) „ „ prostych w przestrzeni,
H) „ „ położeń danej bryły w przestrzeni.

[1]) Dalej (§ 11) damy ściślejszą definicję pojęcia równości mocy zbiorów.
Zauważymy, że Cantor idzie jeszcze dalej i określa pojęcie samej *mocy*, jako tej własności zbioru, którą otrzymujemy abstrahując od porządku i jakości jego elementów.

[2]) Przez zbiór nieskończony rozumiemy tu zbiór nie pusty, którego ilość elementów nie może być wyrażona żadną liczbą naturalną. Dalej (§ 24) spotkamy inne definicje zbiorów nieskończonych, niezależne od pojęcia liczby naturalnej.

Co do stosunkowej liczności tych zbiorów intuicja podsuwa nam następujące przypuszczenie, których słuszności narazie nie przesądzamy:

Zbiór B jest dwakroć liczniejszy od zbioru A. Zbiory D i D' są jednakowo liczne. Każdy ze zbiorów C, D, E, F, G, H jest nieskończenie liczniejszy od poprzedzającego.

Podzielmy wszystkie możliwe zbiory na klasy, zaliczając dwa różne zbiory do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, jeżeli są równej mocy. Symbole, służące do oznaczania tych klas, nazywamy *liczbami kardynalnemi*. Liczby kardynalne, odpowiadające tej samej klasie, uważane są jako równe.

Jeżeli M oznacza daną mnogość, $\mathfrak{m}$ — liczbę kardynalną, służącą do oznaczenia tej klasy zbiorów równej mocy, do której należy M, to będziemy mówili, że mnogości M odpowiada liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ (albo, że zbiór M jest mocy $\mathfrak{m}$), pisząc:

$$\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}.$$

Zbiory równej mocy mają więc tę samą liczbę kardynalną i naodwrót.

Ponieważ w sferze zbiorów skończonych pojęcie zbiorów równej mocy pokrywa się z pojęciem zbiorów o równej liczbie elementów, więc jako odnośne symbole liczb kardynalnych najprościej i najdogodniej będzie przyjąć odpowiednie liczby naturalne: zatem dla zbioru skończonego o n elementach — samą liczbę n. Prócz tych symboli 1, 2, 3, ... znajdą się jednak jeszcze inne liczby kardynalne, mianowicie odpowiadające zbiorom nieskończonym. (Nie przesądzamy narazie, czy taka liczba kardynalna będzie jedna, czy też będzie ich więcej). Dla odróżnienia ich od liczb kardynalnych skończonych (czyli liczb naturalnych) będziemy je nazywali liczbami kardynalnemi *pozaskończonemi* (transfiniti); dla oznaczania tych liczb możemy używać jakichkolwiek liter lub znaczków, byleby różnych od liczb naturalnych. Liczby kardynalne są więc, jak widzimy, uogólnieniem liczb naturalnych (obejmującem te ostatnie jako przypadek szczególny).

§ **11.** Dla ustalenia, kiedy dwie dane liczby kardynalne mamy uważać za równe lub różne, musimy przedewszystkiem określić, kiedy mamy uważać za jednakowe lub różne moce dwóch danych zbiorów — w razie gdy zbiory te są nieskończone. Jako punkt wyjścia dla ściślej definicji w tym względzie posłuży nam analogja ze zbiorami skończonemi.

Aby się przekonać, czy dwa dane zbiory skończone są jednakowo liczne, tworzymy kolejne pary, wybierając po jednym elemencie z każdego ze zbiorów. Zbiory nasze będą jednakowo liczne wtedy i wtedy tylko, jeżeli, postępując w powyższy sposób, wyczerpiemy je oba jednocześnie.

Proces powyższy wyznacza zarazem pewne wzajemne przyporządkowanie elementów uważanych zbiorów. Każdy bowiem element jednego z naszych zbiorów posiada swoją parę, a więc wyznacza pewien element drugiego zbioru i naodwrót. Przyporządkowanie to nazwiemy *wzajemnie-jednoznacznem*, gdyż każdy element jednego zbioru wyznacza *jeden* tylko element drugiego i naodwrót.

Dwa zbiory skończone są więc jednakowo liczne wtedy i tylko wtedy, jeżeli między ich elementami da się ustalić odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczna.

O odpowiedniości wzajemnie-jednoznacznej może być mowa również w odniesieniu do zbiorów nieskończonych, wtedy gdy *wyczerpanie* kolejne wszystkich elementów jest niemożliwe. Np. odpowiedniość taką możemy ustalić dla zbioru wszystkich liczb nieparzystych oraz zbioru wszystkich liczb parzystych, przyporządkowywując każdej liczbie nieparzystej liczbę parzystą, o jedność od niej większą.

Ustaleniem odpowiedniości doskonałej (czyli wzajemnie-jednoznacznej) między elementami dwóch danych zbiorów będziemy nazywali tego rodzaju skojarzenie ich w pary, przy którem w każdej parze mamy po jednym elemencie z każdego zbioru i przytem każdy element ma swoją parę. Elementy, tworzące jedną parę, nazywać będziemy *odpowiednimi*.

Może się oczywiście zdarzyć, że potrafimy w różny sposób ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami dwóch danych zbiorów. Np. dla zbiorów $M = (a, b, c)$ i $N = (x, y, z)$ możemy ją ustalić, łącząc w pary a z x, b z y, c z z, albo też łącząc w pary a z z, b z y, c z x (albo jeszcze na cztery inne sposoby).

Analogja ze zbiorami skończonemi usprawiedliwia teraz postawienie następującej definicji równości mocy:

O dwóch danych zbiorach M i N będziemy mówili, że są równej mocy, jeżeli istnieje odpowiedniość doskonała między ich elementami; w przeciwnym razie będziemy je nazywali zbiorami różnej mocy. Innemi słowy, będziemy mówili, że dwa zbiory M i N są równej mocy w tym i tylko w tym przypadku, jeżeli istnieje zbiór par P taki, iż każda para należąca do P zawiera jeden element ze zbioru M i jeden element ze zbioru N, przyczem każdy element zbioru M i każdy

element zbioru N należy do jednej i tylko jednej z par, tworzących zbiór P[1]).

Dla wyrażenia, że zbiory M i N są równej mocy, będziemy pisali:

$$M \sim N;$$

wzór ten wyraża więc to samo, co wzór:

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Przyjęta definicja równości mocy nie daje jednak żadnego kryterjum, pozwalającego w każdym poszczególnym przypadku rozstrzygnąć, czy dwa dane zbiory M i N są, czy też nie są równej mocy. Badania, czy dwa dane zbiory są równej mocy, czy też nie, przedstawia wogóle wielkie trudności. Skoro potrafimy ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami dwóch danych zbiorów M i N — posiadamy zarazem dowód, że są one równej mocy. Jeżeli atoli nie potrafimy ustalić odpowiedniości doskonałej między elementami dwóch danych zbiorów, nie możemy stąd nic jeszcze wnioskować o równości lub nierówności ich mocy. Abyśmy mogli twierdzić, że dwa dane zbiory M i N nie są równej mocy, musielibyśmy okazać, że odpowiedniość doskonała między ich elementami jest niemożliwa, t. j. że założenie istnienia takiej odpowiedniości doprowadza do sprzeczności. Natomiast dla dowodu, że dwa dane zbiory, M i N, są równej mocy, nie jest koniecznem ustalenie odpowiedniości doskonałej między ich elementami: wystarcza dowieść, że odpowiedniość taka istnieje (choćbyśmy nawet nie potrafili jej wyznaczyć), co może wynikać z przyjętych pewników lub z już dowiedzionych twierdzeń.

Możnaby też rozróżniać między przypadkiem, w którym *potrafimy ustalić* (conajmniej jedną) odpowiedniość doskonałą między elementami dwóch danych zbiorów M i N, a przypadkiem, w którym potrafimy jedynie dowieść, że odpowiedniość taka istnieje (nie przesądzając możności faktycznego jej wyznaczenia): w pierwszym przypadku będziemy mówili, że zbiory M i N są *efektywnie równej mocy*[2]), w drugim — poprostu, że są *równej mocy*[3]). Dodanie wyrazu

[1]) Pojęcie równości mocy sprowadza się w ten sposób do pojęcia zbioru.

[2]) Nie jest tu jednak koniecznem, abyśmy dla każdego danego elementu zbioru M potrafili wskazać odpowiedni element zbioru N: wystarczy, aby element taki był zawsze określony (przez prawo, wyznaczające odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów M i N).

[3]) Przypadki te rozróżniał właściwie już F. Bernstein w *Götting. Nachrichten* 1904 r., str. 558, używając nazw *einwertig äquivalent* i *vielwertig äquivalent*.

efektywnie (do słów „równej mocy") oznaczać więc będzie możność *zrealizowania* w danym przypadku odpowiedniości wzajemnie-jednoznacznej między elementami uważanych zbiorów. Dalej spotkamy przykłady zbiorów równej mocy, które atoli nie będą efektywnie równej mocy. (Jasnem jest, że zbiory, które dzisiaj nie są efektywnie równej mocy, mogą się stać takimi w przyszłości, skoro ustaloną zostanie odpowiedniość doskonała między ich elementami) [1].

§ **12.** Z przyjętej definicji równości mocy wynika natychmiast, że spełnia ona następujące prawa:

I. Prawo *zwrotności,* wyrażające się wzorem:

$$M \sim M,$$

dla każdej mnogości M.

II. Prawo *symetrji,* polegające na tem, że ze wzoru:

$$M \sim N$$

wynika zawsze wzór:

$$N \sim M.$$

III. Prawo *przechodniości,* wedle którego wzory:

$$M \sim N \quad \text{oraz} \quad N \sim P$$

pociągają za sobą zawsze wzór:

$$M \sim P.$$

---

[1]) Przytoczymy tu jeszcze pogląd Lebesgue'a na kwestję równości mocy (wyjątek z listu Lebesgue'a do autora z d. 24.XII 1920):

«Jeżeli mogę ustalić odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczną między elementami dwóch danych zbiorów M i N, potrafię dowieść, że mają one równą moc (jest to właśnie definicja równości mocy). Jeżeli, przeciwnie, potrafię dowieść, że odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczna między elementami zbiorów M i N jest niemożliwa, potrafię udowodnić, że zbiory te nie mają równych mocy. Będziemy naturalnie mieli wiele przypadków, w których nie będziemy potrafili ani jednego, ani drugiego. Wówczas nie będziemy umieli ani dowieść, że M i N są równej mocy, ani też dowieść, że jest przeciwnie. Lecz nie stwarza to żadnej trudności w teorji mocy, podobnie jak fakt, że nie potrafimy rozstrzygnąć, czy stała Eulera jest czy nie jest wymierną, nie stwarza trudności w definicji liczb niewymiernych, albo nasza nieświadomość co do rozmieszczenia miejsc zerowych funkcji $\zeta(s)$ nie stwarza trudności w pojęciu pierwiastka równania.

Nie należy mówić, jak Pan to robi: „Dwa zbiory, które nie są równej mocy dzisiaj, czy mogą się stać nimi jutro?" Lecz tylko: „Istnieją zagadnienia, których nie potrafimy rozwiązać dzisiaj, a które będziemy umieli rozwiązać jutro; istnieją więc pary zbiorów M i N, co do których będzie można powiedzieć jutro, czy są, czy też nie są równej mocy, gdy tymczasem nie potrafimy rozstrzygnąć tego dzisiaj"».

§ **13.** Rozpatrzymy obecnie bliżej parę przykładów na zbiory równej mocy.

Jako pierwszy przykład weźmiemy zbiory, oznaczone w § 10 literami A i B. Powiadam, że *zbiór wszystkich liczb dodatnich parzystych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.*

Dla dowodu należy okazać, że możliwe jest ustalenie odpowiedniości doskonałej między elementami uważanych zbiorów. W tym celu wystarczy skojarzyć w pary każdą liczbę naturalną wraz z dwa razy większą od niej liczbą parzystą. Dla lepszego wyjaśnienia sobie tej odpowiedniości wyobraźmy sobie wypisane w jednym wierszu wszystkie kolejne liczby naturalne, a w drugim wszystkie kolejne liczby dodatnie parzyste:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ 6,\ \ldots,\ \ n,\ \ldots$$
$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

Odpowiednimi są tu elementy obu zbiorów, wypisane w tej samej kolumnie.

Rozpatrzony przykład jest nader pouczający: dowodzi on mianowicie, że zbiór nieskończony może być równej mocy ze swą częścią właściwą. Zobaczymy później, że jest to własność charakterystyczna każdego zbioru nieskończonego.

Jako drugi przykład weźmiemy zbiory B i C z § 10.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych.

D o w ó d. Każdą liczbę wymierną w możemy, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci ułamka nieprzywiedlnego $\frac{p}{q}$ o naturalnym mianowniku. (Jako odnośne przedstawienie zera należy oczywiście uważać ułamek $\frac{0}{1}$).

Podzielmy teraz wszystkie liczby wymierne na klasy, zaliczając do k-tej klasy wszystkie te ułamki nieprzywiedlne $\frac{p}{q}$, dla których:

$$|p| + q = k$$

(symbol $|p|$ oznacza wartość bezwzględną licznika p). Każda liczba wymierna będzie zatem należała do oznaczonej klasy. Jasnem jest z drugiej strony, że w każdej klasie będziemy mieli zawsze *skończoną* liczbę liczb wymiernych, gdyż wszystkie elementy k-tej klasy otrzymamy z ciągu:

$$\frac{-(k-1)}{1}, \frac{-(k-2)}{2}, \ldots, \frac{-1}{k-1}, \frac{0}{k}, \frac{1}{k-1}, \frac{2}{k-2}, \ldots, \frac{k-2}{2}, \frac{k-1}{1},$$

po odrzuceniu tych ułamków, które dadzą się skrócić.

Wyobraźmy sobie teraz wypisane w jednym wierszu wszystkie elementy pierwszej klasy, po nich drugiej, trzeciej i t. d., porządkując elementy każdej klasy, np. według ich wielkości rosnących. Otrzymamy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony:

$$\frac{0}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{4}{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots,$$

w którym znajdziemy każdą liczbę wymierną i przytem każdą raz tylko jeden.

Jeżeli teraz z każdą liczbą wymierną skojarzymy jej numer porządkowy w utworzonym ciągu, to otrzymamy żądaną odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów B i C. Te ostatnie są więc efektywnie równej mocy. (Gdyby nam chodziło o praktyczne wyznaczenie numeru jakiejś danej liczby wymiernej (np. 22/7), to mogłoby to wymagać długiego rachunku, co jednak nie jest żadną wadą z punktu widzenia Teorji mnogości, gdzie chodziło nam jedynie o dowód możliwości ustalenia odnośnej odpowiedniości, a nie o stosowanie jej w praktyce).

Rozpatrzone w tym § przykłady przekonywują nas, jak mylnem było nasze przeświadczenie intuicyjne o liczności zbiorów A, B i C z § 10. Skłonni byliśmy zbiory te uważać za zbiory *różnej* mocy, mianowicie zbiór B za zbiór mocy dwa razy większej od zbioru A (bo liczb parzystych, zdawałoby się, jest dwa razy mniej niż liczb naturalnych), zaś zbiór C za zbiór mocy nieskończenie większej od zbioru B (bo między każdemi dwiema liczbami naturalnemi zawiera się nieskończenie wiele liczb wymiernych). Tymczasem ściślejsza analiza wykazała, że wszystkie te trzy zbiory są tej samej mocy. (Fakt, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych staje się jeszcze bardziej rażącym, skoro go zilustrujemy geometrycznie, uważając na prostej zbiór punktów o odciętych naturalnych oraz zbiór punktów o odciętych wymiernych. Punkty pierwszego zbioru będą odosobnione, każde dwa w skończonej > 0 odległości jeden od drugiego, zaś punkty drugiego zbioru utworzą na prostej zbiór wszędzie gęsty, mianowicie będzie ich nieskończenie wiele na każdym, jak chcąc małym, odcinku prostej).

Łatwo sobie wyjaśnić przyczynę tego paradoksu. Wprowadzając pojęcie mocy zastrzegaliśmy, że mamy oderwać naszą uwagę od po-

rządku oraz jakości elementów zbioru, tymczasem przypuszczenie nasze, że liczb naturalnych jest dwa razy więcej niż parzystych, opieraliśmy właśnie na *porządku*, w jakim te ostatnie spotykamy w ciągu liczb naturalnych (mianowicie na fakcie, że między każdemi dwiema liczbami parzystemi zawsze jest jeszcze jedna liczba naturalna). Podobnież, sądząc, że zbiory B i C są różnej mocy, mieliśmy na względzie uporządkowanie wszystkich liczb wymiernych według ich wielkości.

W każdym jednak razie musimy teraz uznać za zachwiane również i inne nasze przeświadczenia intuicyjne co do mocy zbiorów nieskończonych, a przedewszystkiem możemy mieć wątpliwość już i co do tego, czy wogóle istnieją zbiory nieskończone *różnych* mocy. Rozstrzygnięcie tego pytania jest dla Teorji mnogości sprawą wielkiej wagi. Gdyby bowiem miało się okazać, że wszystkie zbiory nieskończone są równej mocy, to mielibyśmy jedną jedyną liczbę kardynalną pozaskończoną (∞) i, co się tyczy pojęcia mocy, tudzież liczb kardynalnych — Teorja mnogości nie miałaby nic więcej do powiedzenia.

Przekonamy się atoli w następnym §, że tak nie jest, mianowicie, że istnieją zbiory nieskończone *różnej* mocy.

§ **14.** Dla dowodu, że istnieją zbiory nieskończone różnych mocy wystarczy oczywiście dać choć jeden przykład dwóch zbiorów nieskończonych, nie będących równej mocy. Jako takie obierzemy zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Dowód, że zbiory te nie mogą być równej mocy, wyniknie natychmiast z następującego lemmatu:

Lemmat. *Można ustalić prawo, według którego każdemu ciągowi nieskończonemu liczb rzeczywistych odpowiada liczba rzeczywista* (określona w zupełności przez dany ciąg), *różna od każdego z wyrazów uważanego ciągu.*

Dowód. Niech

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots \tag{1}$$

oznacza jakikolwiek dany ciąg liczb rzeczywistych.

Każda liczba rzeczywista może być, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawiona w postaci ułamka dziesiętnego normalnego [1]), (który możemy zawsze uważać jako nieskończony, zastępując ewentualnie brakujące cyfry przez zera). Niech:

$$u_n = c_0^{(n)},\ c_1^{(n)}\, c_2^{(n)}\, c_3^{(n)} \ldots \tag{2}$$

[1]) Zob. np. moją „Analizę" t. I (Warszawa 1923), § 15, str. 34.
Normalnym nazywamy ułamek dziesiętny skończony, albo taki nieskończony, w którym nieskończenie wiele cyfr jest różnych od cyfry 9.

oznacza rozwinięcie normalne liczby u_n na ułamek dziesiętny. Połóżmy teraz przy wszelkiem naturalnem n:

$$\left.\begin{array}{l} c_n = 0, \text{ jeżeli } c_n^{(n)} > 0, \\ c_n = 1, \text{ jeżeli } c_n^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

zaś

Ciąg nieskończony c_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie przez powyższe warunki określony w zupełności, przyczem, wobec (3), wnosimy natychmiast, że liczby c_n będą cyframi w układzie dziesiętnym, różnemi od cyfry 9. Wzór

$$u = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots . \qquad (4)$$

daje więc rozwinięcie normalne pewnej liczby rzeczywistej u. Niech teraz n oznacza jakikolwiek dany wskaźnik. Wzory (2) i (3) dowodzą, że n-ta cyfra rozwinięcia (4) różni się od n-tej cyfry rozwinięcia (2): ponieważ zaś każda liczba rzeczywista daje tylko jedno rozwinięcie na ułamek dziesiętny normalny, więc wynika stąd, że $u \neq u_n$. Liczba u jest więc różną od każdej z liczb ciągu (1). Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Z lemmatu naszego wynika natychmiast, że nie istnieje żaden ciąg nieskończony, który zawierałby każdą liczbę rzeczywistą. Ciąg taki musiałby atoli istnieć, gdyby zbiór wszystkich liczb rzeczywistych był równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Oba te zbiory nie mogą zatem być równej mocy, c. b. d. o.

Dowiedliśmy więc, że *istnieją zbiory nieskończone różnej mocy*. Będziemy więc mieli conajmniej dwie różne (t. j. odpowiadające zbiorom różnej mocy) liczby kardynalne pozaskończone.

Możnaby teraz pójść dalej i zapytać, ile będzie wogóle *różnych* liczb kardynalnych pozaskończonych: udowodnimy później (§ 39), że jest ich nieskończenie wiele.

§ **15.** Niech $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą dwie dane liczby kardynalne. W myśl definicji liczb kardynalnych (§ 10), $\mathfrak{m}$ jest symbolem, odpowiadającym pewnej klasie zbiorów tej samej mocy. Niech M oznacza którykolwiek ze zbiorów tej klasy: $\overline{M} = \mathfrak{m}$. Podobnież, niech N będzie którymkolwiek ze zbiorów, którym odpowiada liczba kardynalna $\mathfrak{n}$. Powiadam, że można będzie założyć, iż zbiory M i N nie posiadają elementów wspólnych. W samej rzeczy, gdyby było inaczej, to wystarczyłoby zamiast zbiorów M i N wziąć zbiór M' wszystkich układów $(m, 1)$, gdzie m oznacza jakikolwiek element zbioru M, oraz zbiór N' wszystkich układów $(n, 2)$, gdzie n oznacza jakikolwiek element zbioru N. Jasnem jest, że:

$$M' \sim M \text{ oraz } N' \sim N,$$

zatem $\overline{\overline{M'}} = \mathfrak{m}$ i $\overline{\overline{N'}} = \mathfrak{n}$, przyczem zbiory M' i N' nie mają oczywiście elementów wspólnych.

Zatem, skoro dane są dwie liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$, możemy zawsze przypuścić, iż istnieją zbiory M i N, nie mające elementów wspólnych i takie, iż:

$$\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}, \qquad \overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}. \tag{5}$$

Połóżmy

$$S = M + N. \tag{6}$$

Niech teraz M_1 i N_1 będą dwa jakiekolwiek zbiory, nie mające elementów wspólnych, i również takie, iż:

$$\overline{\overline{M_1}} = \mathfrak{m}, \qquad \overline{\overline{N_1}} = \mathfrak{n}, \tag{7}$$

i połóżmy:

$$S_1 = M_1 + N_1; \tag{8}$$

łatwo widzieć, że będzie:

$$S_1 \sim S. \tag{9}$$

W samej rzeczy, wobec (5) i (7), będzie

$$M_1 \sim M \text{ oraz } N_1 \sim N:$$

istnieje zatem odpowiedniość doskonała między elementami zbiorów M_1 i M, jako też odpowiedniość doskonała między elementami zbiorów N_1 i N, skąd wynika natychmiast istnienie odpowiedniości doskonałej między elementami zbiorów $M_1 + N_1$ oraz $M + N$, t. j., wobec (6) i (8), między elementami zbiorów S_1 i S, co daje wzór (9). Zbiorom S i S_1, odpowiada więc ta sama liczba kardynalna: oznaczmy ją przez $\mathfrak{s}$.

Możemy więc powiedzieć: Każdym dwum liczbom kardynalnym $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ odpowiada oznaczona w zupełności liczba kardynalna $\mathfrak{s}$ taka, iż, gdy M i N są dwa dowolne zbiory bez elementów wspólnych, spełniających warunki $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$, i gdy położymy $S = M + N$, to będzie zawsze $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{s}$.

Łatwo widzieć, że jeżeli liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ są skończone, to liczba $\mathfrak{s}$ jest ich sumą. Naturalnem więc będzie, jeżeli dla każdych dwuch liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ nazwiemy ich *sumą* liczbę $\mathfrak{s}$, otrzymaną w powyższy sposób, pisząc:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{s} \quad \text{lub} \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}.$$

Każde dwie liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ dają więc określoną w zupełności sumę, (która jest liczbą kardynalną, zależną jedynie od $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$). Liczby kardynalne odpowiednio równe dają oczywiście równe sumy.

Ponieważ suma dwuch zbiorów nie zależy od porządku składników, więc wynika stąd własność przemienności sumy dwuch liczb kardynalnych:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}.$$

Z definicji sumy dwuch liczb kardynalnych wynika natychmiast, że jeżeli M i N są dwa jakiekolwiek zbiory nie mające elementów wspólnych i jeżeli $S = M + N$, to $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{M}} + \overline{\overline{N}}$.

Łatwo też widzieć, że jeżeli dla jakiegoś zbioru S mamy $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ (gdzie $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ są dwie dane liczby kardynalne), to istnieją dwa zbiory M i N bez elementów wspólnych, także iż $S = M + N$, $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$.

Pojęcie sumy liczb kardynalnych może być natychmiast rozciągnięte na dowolną skończoną liczbę składników, przyczem oczywistem jest, że suma taka jest przemienną i łączną.

Łatwo też widzieć, że można dodawać stronami dowolną skończoną liczbę równości dla liczb kardynalnych.

§ **16.** Niech $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą dwie dane liczby kardynalne, M i N — dwa jakiekolwiek zbiory, takie iż

$$\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}, \quad \overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}. \qquad (10)$$

Oznaczmy przez P zbiór wszystkich układów (m, n), gdzie m jest jakimkolwiek elementem zbioru M, zaś n — jakimkolwiek elementem zbioru N. Łatwo widzieć, że jeżeli M_1 i N_1 są dwa jakiekolwiek zbiory, takie iż

$$\overline{\overline{M_1}} = \mathfrak{m}, \quad \overline{\overline{N_1}} = \mathfrak{n} \qquad (11)$$

i jeżeli oznaczymy przez P_1 zbiór wszystkich układów (m_1, n_1), gdzie m_1 jest jakimkolwiek elementem zbioru M_1, zaś n_1 — jakimkolwiek elementem zbioru N_1, to

$$P_1 \sim P.$$

Zbiorom P i P_1 odpowiada więc ta sama liczba kardynalna: oznaczmy ją przez $\mathfrak{p}$. Liczba kardynalna $\mathfrak{p}$ nie zależy więc od poszczególnego obioru zbiorów M i N, spełniających warunek (10), lecz jedynie od liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$. Łatwo też widzieć, że jeżeli liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ są skończone, to liczba $\mathfrak{p}$ jest ich iloczynem. Będzie więc rzeczą naturalną, jeżeli dla wszelkich liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ nazwiemy ich *iloczynem* liczbę $\mathfrak{p}$ w powyższy sposób otrzymaną i będziemy pisali:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{p} \quad \text{lub} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}.$$

Każde więc dwie dane liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ dają oznaczony w zupełności iloczyn (będący liczbą kardynalną zależną jedynie od $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$). Czynniki odpowiednio równe dają oczywiście równe iloczyny.

§ **17.** Łatwo widzieć, że iloczyn dwuch liczb kardynalnych jest *przemienny,* t. j. mamy zawsze:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{m},$$

(ponieważ zbiory wszystkich układów (m, n) oraz (n, m) są oczywiście równej mocy).

Pojęcie iloczynu liczb kardynalnych możemy z łatwością rozciągnąć na dowolną, skończoną liczbę czynników, przyczem łatwo widzieć, że iloczyn taki jest przemienny i łączny. Posiada on również prawo rozdzielności, t. j. mamy dla wszelkich liczb kardynalnych $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) = \mathfrak{l}\mathfrak{m} + \mathfrak{l}\mathfrak{n}, \tag{12}$$

jak to z łatwością czytelnik sam szczegółowo udowodni.

Zauważymy też, że jeżeli liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest skończona, to (dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{n}$) iloczyn $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ jest sumą $\mathfrak{m}$ składników, równych liczbie $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \overset{1}{\overbrace{\mathfrak{n}}} + \overset{2}{\overbrace{\mathfrak{n}}} + \ldots + \overset{\mathfrak{m}}{\overbrace{\mathfrak{n}}}.$$

(W samej rzeczy, niech N oznacza zbiór, taki iż $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$, i weźmy pod rozwagę zbiór P wszystkich układów (m, n), gdzie m jest jakąkolwiek liczbą naturalną z ciągu $1, 2, \ldots, \mathfrak{m}$, zaś n — jakimkolwiek elementem zbioru N. W myśl definicji iloczynu liczb kardynalnych, będzie $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$. Z drugiej strony możemy uważać zbiór P jako sumę zbiorów $P_1, P_2, \ldots, P_\mathfrak{m}$, gdzie (dla każdego danego $k = 1, 2, \ldots, \mathfrak{m}$) P_k oznacza zbiór wszystkich układów (k, n), gdzie n jest jakimkolwiek elementem zbioru N. Będzie oczywiście $\overline{\overline{P_k}} = \mathfrak{n}$ dla $k = 1, 2, \ldots, \mathfrak{m}$ i wzór $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_\mathfrak{m}$ (gdzie zbiory $P_1, P_2, \ldots, P_\mathfrak{m}$ nie mają oczywiście elementów wspólnych) daje, wobec $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$, wzór (12)).

Zauważymy jeszcze, że jeżeli p oznacza dowolną daną liczbę naturalną i jeżeli $M_1, M_2, \ldots, M_p$ są zbiory, takie iż:

$$\overline{\overline{M_k}} = \mathfrak{m}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

to, oznaczając przez P zbiór wszystkich układów:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_p),$$

gdzie (dla każdego danego k z ciągu $1, 2, \ldots, p$) m_k oznacza jakikolwiek element zbioru M_k, będziemy mieli

$$\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_p.$$

Okażemy obecnie, że jeżeli $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ są dwie dowolne dane liczby kardynalne, to każdy zbiór P mocy $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ może być uważany jako suma rozłączna zbiorów, w której mnogość składników jest mocy $\mathfrak{m}$, zaś każdy składnik jest zbiorem mocy $\mathfrak{n}$.

W samej rzeczy, niech P oznacza dowolny dany zbiór, taki iż:

$$\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}\mathfrak{n} \tag{13}$$

i niech M i N będą zbiory takie, iż:

$$\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}, \quad \overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}. \tag{14}$$

Weźmy pod uwagę zbiór U wszystkich układów (m, n), gdzie m jest jakimkolwiek elementem zbioru M, zaś n — jakimkolwiek elementem zbioru N. Wobec (14) oraz w myśl definicji iloczynu liczb kardynalnych, mamy:

$$\overline{\overline{U}} = \mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

zatem, w myśl (13):

$$\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{P}}, \text{ czyli } U \sim P.$$

Istnieje więc między elementami zbiorów P i U odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczna. Oznaczmy, dla każdego danego elementu m zbioru M, przez S_m zbiór wszystkich tych elementów zbioru P, które w uważanej odpowiedniości wzajemnie-jednoznacznej odpowiadają układom (m, n), gdzie n jest jakimkolwiek elementem zbioru N. Będziemy mieli oczywiście:

$$\overline{\overline{S_m}} = \mathfrak{n}, \tag{15}$$

dla każdego elementu m zbioru M, i różnym elementom m i m' zbioru M odpowiadać będą zawsze zbiory S_m i $S_{m'}$ nie mające elementów wspólnych. Zbiór zaś P będzie oczywiście sumą wszystkich zbiorów S_m, odpowiadających elementom m zbioru M: mnogość wszystkich składników (S_m) tej sumy ma więc moc $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, zaś, wobec (15), każdy ze składników jest mocy $\mathfrak{n}$. Uzyskaliśmy w ten sposób żądany rozkład zbioru P.

Dowód twierdzenia odwrotnego (że jeżeli P jest sumą zbiorów, gdzie mnogości składników jest mocy $\mathfrak{m}$, zaś każdy ze składników jest zbiorem mocy $\mathfrak{n}$, to $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$) opiera się na t. zw. *pewniku wyboru* (§ 57).

§ **18.** Niech M i N będą dwa dane zbiory. Przypuśćmy, że każdemu elementowi zbioru N przyporządkowany został pewien element zbioru M, przyczem przyporządkowanie to jest jednoznacznem (każdemu elementowi zbioru N przyporządkowany jest jeden tylko

element zbioru M), lecz niekoniecznie wzajemnie-jednoznacznem (ten sam element zbioru M może być przyporządkowany różnym elementom zbioru N, albo też w zbiorze M mogą się znajdować elementy, nie przyporządkowane żadnemu elementowi zbioru N). O każdem takiem przyporządkowaniu mówimy, że wyznacza pewne *odwzorowanie* zbioru N na zbiorze M, albo że określa pewną *funkcję* elementów zbioru N, której wartości bierzemy ze zbioru M; jeżeli, przytem, m oznacza element zbioru M, przyporządkowany elementowi n zbioru N, to piszemy:

$$m = f(n)$$

i nazywamy m *obrazem* elementu n.

W szczególności zbiory M i N mogą być identyczne: mówimy wówczas, że mamy do czynienia z odwzorowaniem mnogości N na samej sobie (np. każda funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej daje odwzorowanie mnogości liczb rzeczywistych na samej sobie; każdy ciąg nieskończony o wyrazach naturalnych daje odwzorowanie mnogości liczb naturalnych na samej sobie). Odpowiedniość doskonała między elementami dwóch mnogości M i N oczywiście też może być uważana jako przypadek szczególny odwzorowania mnogości N na mnogości M.

Niech teraz $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą dwie dane liczby kardynalne, M i N — dwie dane mnogości, takie iż:

$$\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m} \quad \text{oraz} \quad \overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}.$$

Oznaczmy, dalej, przez P zbiór wszystkich różnych odwzorowań mnogości N na mnogości M. Łatwo widzieć, że jeżeli M_1 i N_1 będą jakiekolwiek mnogości, takie iż:

$$\overline{\overline{M}}_1 = \mathfrak{m} \quad \text{oraz} \quad \overline{\overline{N}}_1 = \mathfrak{n}$$

i jeżeli przez P_1 oznaczymy zbiór wszystkich odwzorowań mnogości N_1 na mnogości M_1, to będzie:

$$P_1 \sim P$$

i przeto $\overline{\overline{P}}_1 = \overline{\overline{P}}$. (Odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów P_1 i P ustalimy np., uważając jako odpowiednie dwa odwzorowania: mnogości N na M, oraz mnogości N_1 na M_1, w których, skojarzonym ze sobą (w odpowiedniości doskonałej między N i N_1) elementom mnogości N i N_1 przyporządkowane są zawsze skojarzone ze sobą (w odpowiedniości doskonałej między M i M_1) elementy mnogości M i M_1).

Mnogościom P i P_1 odpowiada więc ta sama liczba kardynalna: oznaczmy ją przez $\mathfrak{p}$. Liczba kardynalna $\mathfrak{p}$ jest więc wyznaczoną w zupełności przez liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$. Łatwo, dalej, widzieć, że jeżeli liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ są skończone, to będzie $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$. Naturalnem więc będzie dla wszelkich liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ nazywać otrzymaną w powyższy sposób liczbę $\mathfrak{p}$ *potęgą* o podstawie $\mathfrak{m}$ i wykładniku $\mathfrak{n}$, pisząc:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}.$$

Dla każdych danych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ potęga $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ jest więc oznaczoną w zupełności liczbą kardynalną (zależną jedynie od $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$). Dla $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1$ mamy przytem oczywiście $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}_1^{\mathfrak{n}_1}$. Łatwo też widzieć, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ mamy: $\mathfrak{m}^1 = \mathfrak{m}$ oraz $1^{\mathfrak{m}} = 1$.

§ **19.** Zwrócimy uwagę na pewien ważny przypadek szczególny potęgi liczb kardynalnych. Niech N oznacza jakąkolwiek daną mnogość. Weźmy pod rozwagę zbiór U, złożony ze wszystkich części mnogości N (wliczając w to i część pustą, jakoteż samą mnogość N). Z drugiej strony oznaczmy przez M mnogość, złożoną z dwóch liczb: 0 i 1, oraz weźmy pod rozwagę zbiór P wszystkich różnych odwzorowań mnogości N na mnogości M. Z łatwością możemy ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów P i U: wystarczy w tym celu każdej części u mnogości U przyporządkować odwzorowanie mnogości N na mnogości M, w którem każdemu elementowi mnogości N, należącemu do części u odpowiada liczba 1, zaś każdemu elementowi mnogości N, nie należącemu do u — liczba 0. Mamy więc $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{P}}$, a że z definicji mnogości P oraz z definicji potęgi liczb kardynalnych wynika, iż $\overline{\overline{P}} = 2^{\mathfrak{n}}$, gdzie $\mathfrak{n} = \overline{\overline{N}}$, więc mamy:

Twierdzenie. Jeżeli N oznacza jakąkolwiek mnogość, $\mathfrak{n}$ — jej liczbę kardynalną, to liczbą kardynalną zbioru wszystkich części mnogości N jest $2^{\mathfrak{n}}$.

Opierając się na definicji sumy, iloczynu, oraz potęgi liczb kardynalnych, możnaby udowodnić z łatwością, że dla wszelkich liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{p}$ zachodzą wzory:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} . \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}},$$
$$(\mathfrak{m}\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} . \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}},$$
$$(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\mathfrak{p}}.$$

Zauważymy, że jeżeli liczba kardynalna $\mathfrak{n}$ jest skończona, to (dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$) potęga $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ jest iloczynem $\mathfrak{n}$ czynników, równych liczbie $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \underbrace{\mathfrak{m}}_{1}\underbrace{\mathfrak{m}}_{2} \ldots \underbrace{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{n}}. \tag{16}$$

W samej rzeczy, weźmy pod rozwagę zbiór Q wszystkich układów:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n), \tag{17}$$

gdzie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ są jakiekolwiek elementy mnogości M (wśród których mogą być jednakowe). Będzie, jak wiemy (§ 17):

$$\overline{\overline{Q}} = \underbrace{\mathfrak{m}}_{1}\underbrace{\mathfrak{m}}_{2} \ldots \underbrace{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{n}}. \tag{18}$$

Każdemu układowi (17) odpowiada oczywiście pewne odwzorowanie mnogości N, złożonej z $\mathfrak{n}$ liczb $1, 2, \ldots, \mathfrak{n}$, na mnogości M, mianowicie to, w którem liczbie k przyporządkowany jest element m_k (dla $k = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n}$), przyczem odpowiedniość ta jest, jak łatwo widzieć, doskonała. Oznaczając więc przez P zbiór wszystkich odwzorowań mnogości N na M, będziemy mieli $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{Q}}$, skąd, wobec (18) i z uwagi, że w myśl definicji potęgi, $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$, wnosimy o prawdziwości wzoru (16).

Jeżeli więc M oznacza jakąkolwiek daną mnogość mocy $\mathfrak{m}$, zaś n — dowolną daną liczbę naturalną, to zbiór wszystkich ciągów n-wyrazowych, których wyrazy są elementami mnogości M, jest mocy $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$. Powiadam dalej, że *jeżeli M oznacza jakąkolwiek daną mnogość mocy $\mathfrak{m}$, zaś $\mathfrak{a}$ jest liczbą kardynalną, odpowiadającą mnogości wszystkich liczb naturalnych, to zbiór wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazy są elementami mnogości M, jest mocy* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{a}}$. Dla dowodu wystarczy się powołać na definicję potęgi liczb kardynalnych, oraz zauważyć, że każde odwzorowanie mnogości wszystkich liczb naturalnych na mnogości M wyznacza pewien ciąg nieskończony, którego wyrazami są elementy mnogości M, oraz naodwrót.

ROZDZIAŁ III.

Zbiory przeliczalne.

§ **20.** Mnogość, która jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, nazywamy *przeliczalną* (abzählbar, dénombrable). Definicja ta jest, jak to odrazu widzimy, równoważna następującej:

Daną mnogość nazywamy przeliczalną wtedy i wtedy tylko, jeżeli istnieje tego rodzaju odpowiedniość wzajemna między jej elementami z jednej strony, a liczbami naturalnemi z drugiej, że każdemu elementowi uważanej mnogości odpowiada oznaczona w zupełności (przez ten element) liczba naturalna, przyczem każda liczba naturalna odpowiada pewnemu i przytem tylko jednemu elementowi uważanej mnogości.

Wynika stąd natychmiast, że wszystkie wyrazy każdego danego ciągu nieskończonego (liczb, lub innych elementów):

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots.$$

tworzą zawsze mnogość przeliczalną i naodwrót: dla każdej danej mnogości przeliczalnej istnieje ciąg nieskończony taki, iż wszystkie wyrazy jego tworzą uważaną mnogość (przyczem takich ciągów istnieje, jak łatwo widzieć, dla każdej mnogości przeliczalnej nieskończenie wiele).

Jasnem jest również, że każda część mnogości przeliczalnej, o ile nie jest skończoną, jest mnogością przeliczalną, oraz, że jeżeli rozbijemy mnogość przeliczalną na sumę dwóch mnogości, to jedna conajmniej z nich jest przeliczalna. Oczywistem jest też, że zbiór przeliczalny posiada części, mające dowolną daną skończoną liczbę elementów.

Liczbę kardynalną, odpowiadającą zbiorom przeliczalnym, przyjęto oznaczać, za C a n t o r'em, symbolem:

$$\aleph_0 \text{ (alef-zero).}$$

Jeżeli dana mnogość jest efektywnie równej mocy (§ 11) ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, to nazywamy ją *efektywnie przeliczalną*. Na to więc, żeby dana mnogość była efektywnie przeliczalną, potrzeba i wystarcza, abyśmy potrafili wskazać taki sposób ponumerowania wszystkich jej elementów, iżby każdy element uważanej mnogości nosił swój oznaczony numer, i żeby przytem były użyte jako numery wszystkie liczby naturalne, każda raz tylko jeden (dla zwykłej zaś przeliczalności wystarcza, aby taki sposób ponumerowania uważanej mnogości istniał, choćbyśmy nie potrafili go wskazać).

Inaczej jeszcze możemy powiedzieć: na to, żeby dana mnogość była efektywnie przeliczalna, potrzeba i wystarcza, abyśmy umieli ustalić prawo dla ustawienia wszystkich jej elementów w ciąg nieskończony (albo jeszcze: abyśmy potrafili wskazać ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich elementów uważanej mnogości) [1]). (Jeżeli potrafimy wskazać jeden taki ciąg, to możemy z niego otrzymać dowolną liczbę takich ciągów, przez zmianę porządku wyrazów: otrzymane w ten sposób ciągi dają ten sam zbiór wyrazów, ale nie są ze sobą identyczne, gdyż różnią się uporządkowaniem).

Łatwo widzieć, że każda część mnogości efektywnie przeliczalnej, o ile nie jest skończona, jest mnogością efektywnie przeliczalną [2]). W samej rzeczy, niech M oznacza daną mnogość efektywnie przeliczalną. Potrafimy więc wskazać ciąg nieskończony:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots . \tag{1}$$

utworzony ze wszystkich elementów mnogości M. Niech, dalej, N oznacza część mnogości M, która nie jest skończoną. Usuńmy z ciągu (1) wszystkie jego wyrazy, które nie są elementami mnogości N (nie zmieniając przytem kolejnego następstwa pozostałych wyrazów ciągu):

[1]) E. B o r e l nazywa obecnie efektywnie przeliczalnym zbiór, który jest *dany w postaci ciągu nieskończonego* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ (*Accad. dei Lincei*, vol 28 ser. 5a (2 sem. 1919), p. 164.

[2]) Przeciwne twierdzenie B o r e l a (*Leçons sur la th. des fonct.* Paris 1914, p. 166) jest wynikiem nieporozumienia, zaś przykład, który B o r e l daje na poparcie swego twierdzenia, jest oparty na t. zw. antynomji R i c h a r d a: wiadomo zaś z logiki, że wychodząc ze sprzeczności, można dowieść wszystkiego.

pozostanie w ten sposób z ciągu (1) pewien oznaczony w zupełności nowy ciąg nieskończony:

$$v_1, v_2, v_3, \ldots . \quad (2)$$

który będzie oczywiście utworzony ze wszystkich elementów mnogości N. Elementy tej ostatniej potrafimy więc ustawić w ciąg nieskończony (2), co dowodzi, że mnogość N jest efektywnie przeliczalna.

W § 13 wyznaczyliśmy ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich liczb wymiernych. Możemy więc powiedzieć:

Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest efektywnie przeliczalny.

Inne przykłady mnogości efektywnie przeliczalnych poznamy później (§§ 26—28). Nie znamy dotąd żadnego przykładu mnogości przeliczalnej, którąby nie była efektywnie przeliczalną: nie mamy jednak też dowodu na to, że każda mnogość przeliczalna jest efektywnie przeliczalna [1]).

§ **21.** Niech n oznacza jakąkolwiek liczbę naturalną. Oznaczmy przez P_n mnogość liczb naturalnych nie większych od n, zaś przez Q_n mnogość liczb naturalnych większych od n i połóżmy $S = P_n + Q_n$: będzie to więc mnogość wszystkich liczb naturalnych.

Ponieważ mnogość P_n składa się z n elementów:

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

zaś mnogość Q_n, składająca się z elementów:

$$n+1, n+2, n+3, \ldots,$$

jest oczywiście przeliczalną, podobnie jak mnogość S, więc mamy:

$$\overline{\overline{P}}_n = n, \ \overline{\overline{Q}}_n = \aleph_0, \ \overline{\overline{S}} = \aleph_0 . \quad (3)$$

[1]) Istnieją natomiast zbiory mnogości przeliczalnych, dla których nie potrafimy ustalić prawa, według którego każdej mnogości, należącej do zbioru, odpowiadałby oznaczony ciąg nieskończony, utworzony z jej elementów. Zbiór taki otrzymamy np. dzieląc wszystkie liczby rzeczywiste na mnogości tak, iżby dwie liczby rzeczywiste były zaliczone zawsze do tej samej mnogości, jeżeli różnica ich jest wymierną, zaś do różnych mnogości, jeżeli różnica ich jest niewymierną (każda z takich mnogości będzie, jak łatwo widzieć, równej mocy z mnogością wszystkich liczb wymiernych, a więc przeliczalną: jeżeli bowiem M jest jedną z naszych mnogości, x — jakimkolwiek jej elementem, to mnogość M możemy oczywiście uważać jako mnogość wszystkich liczb postaci $x + w$, gdzie w jest jakąkolwiek liczbą wymierną).

Lecz, wobec $P_n + Q_n = S$ i z uwagi, że mnogości P_n i Q_n nie posiadają elementów wspólnych, mamy, jak wiadomo (§ 15):

$$\overline{\overline{P_n}} + Q_n = S:$$

wzory (3) dają więc

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 . \tag{4}$$

Udowodniliśmy więc, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór (4).

Oznaczmy teraz przez U mnogość wszystkich liczb naturalnych nieparzystych, czyli mnogość, utworzoną z elementów

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots,$$

zaś przez V mnogość wszystkich liczb naturalnych parzystych, czyli mnogość, utworzoną z elementów

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$$

Kładąc $S = U + V$, będziemy mieli oczywiście

$$\overline{\overline{U}} = \aleph_0 , \quad \overline{\overline{V}} = \aleph_0 , \quad \overline{\overline{S}} = \aleph_0$$

oraz

$$\overline{\overline{U}} + V = S$$

(gdyż mnogości U i V nie posiadają elementów wspólnych), skąd w jednej chwili:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 . \tag{5}$$

Drogą łatwej indukcji wnosimy, dalej, ze wzoru (5), że suma każdej skończonej liczby liczb kardynalnych, z których każda jest równa $\aleph_0$, wynosi $\aleph_0$, czyli, że przy wszelkiem naturalnem n mamy:

$$\overset{1}{\breve{\aleph}_0} + \overset{2}{\breve{\aleph}_0} + \ldots \overset{n}{\breve{\aleph}_0} = \aleph_0 ,$$

co możemy napisać też w postaci (§ 17):

$$n \aleph_0 = \aleph_0 .$$

Ze wzorów (4) i (5) wynika natychmiast, że *suma mnogości skończonej i mnogości przeliczalnej, jakoteż suma dwóch mnogości przeliczalnych, jest mnogością przeliczalną* (przyczem, jak łatwo widzieć, zachodzi to też w przypadku, kiedy uważane mnogości posiadają elementy wspólne).

§ **22.** Niech P oznacza mnogość wszystkich układów (m, n) dwóch liczb naturalnych m, n. Z definicji iloczynu liczb kardynalnych (§ 16) wynika natychmiast, że będzie

$$\overline{\overline{P}} = \aleph_0\, \aleph_0 \tag{6}$$

Z drugiej strony, mnogość P uważać możemy jako zbiór wszystkich wyrazów ciągu podwójnego układów:

$$\begin{array}{l}(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), \ldots \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Ciąg ten możemy ustawić w ciąg zwykły t. zw. *metodą przekątnich,* łącząc w kolejne grupy jego wyrazy, w ten sposób, iż do k-tej grupy zaliczamy wszystkie te układy (m, n), dla których $m + n = k + 1$, przyczem wyrazy każdej grupy wypisujemy według rosnących wartości n:

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (4, 1), \ldots$$ [1])

Zbiór P jest więc przeliczalny, czyli

$$\overline{\overline{P}} = \aleph_0,$$

co, wobec (6), daje wzór:

$$\aleph_0\, \aleph_0 = \aleph_0. \tag{7}$$

Ze wzoru (7) wynika natychmiast (§ 19), że przy wszelkiem naturalnem k:

$$\aleph_0^k = \aleph_0.$$

Wnosimy stąd z łatwością (§ 17), że przy wszelkiem danem naturalnem k zbiór wszystkich układów k liczb naturalnych jest przeliczalny. Twierdzenie to wynika też natychmiast z ogólniejszego twierdzenia, że *zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych jest efektywnie przeliczalny.* Dla dowodu wystarczy każdemu ciągowi, utworzonemu z k liczb naturalnych

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

przyporządkować numer

$$N = 2^{n_1 - 1} + 2^{n_1 + n_2 - 1} + \ldots + 2^{n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1};$$

[1]) Łatwo obliczyć, że układ (m, n) będzie zajmował w tym ciągu miejsce o numerze $N = \frac{(m+n-1)(m+n)}{2} - m + 1.$

łatwo widzieć, że umowa taka ustala odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczną między zbiorem wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych, a zbiorem wszystkich numerów. (Analogiczne twierdzenie o zbiorze wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych udowodnimy w § 27).

Twierdzenie. Jeżeli dana mnogość M posiada część przeliczalną, to posiada też część właściwą, równej mocy z samą mnogością M.

W samej rzeczy, załóżmy, że mnogość M posiada część przeliczalną P. Z założenia, że mnogość P jest przeliczalna, wynika, że istnieje ciąg nieskończony:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, \tag{8}$$

taki, iż zbiór wszystkich jego wyrazów tworzy mnogość P. Przyporządkujmy teraz samemu sobie każdy element mnogości M, nie będący żadnym z wyrazów ciągu (8) (o ile takowe istnieją). Dalej, przyporządkujmy każdemu wyrazowi ciągu (8) następujący po nim wyraz tegoż ciągu (więc elementowi u_n — element u_{n+1}, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$). W ten sposób ustalimy oczywiście odpowiedniość doskonałą między wszystkimi elementami mnogość M z jednej strony, a wszystkimi elementami mnogości $M_1 = M - (u_1)$ (t. j. mnogości, otrzymanej przez usunięcie z mnogości M elementu u_1) — z drugiej: mamy więc $\overline{\overline{M_1}} = \overline{\overline{M}}$. Lecz mnogość M_1 jest oczywiście częścią właściwą mnogości M. Dowiedliśmy więc, że mnogość M posiada część właściwą równej z M mocy, c. b. d. o.

Udowodnimy obecnie twierdzenie odwrotne: *Jeżeli dana mnogość M posiada część właściwą równej mocy z M_1, to mnogość M posiada też część przeliczalną.*

Załóżmy więc, że dana mnogość M posiada część właściwą T równej mocy z M. Ponieważ T jest częścią właściwą mnogości M, więc istnieje w tej ostatniej element u_1, który nie jest elementem mnogości T. Z założenia, że mnogości M i T są równej mocy wynika, że istnieje odpowiedniość doskonała między elementami tych mnogości: oznaczmy ogólnie przez $\varphi(u)$ ten element mnogości T, który odpowiada elementowi u mnogości M. Ponieważ T jest częścią mnogości M, więc dla każdego elementu u mnogości M, $\varphi(u)$ również jest elementem mnogości M. Połóżmy kolejno:

$$u_2 = \varphi(u_1),\ u_3 = \varphi(u_2), \ldots, \text{ ogólnie } u_n = \varphi(u_{n-1}) \text{ dla } n = 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Powiadam, że ciąg nieskończony:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots . \tag{10}$$

będzie ciągiem samych różnych elementów mnogości M. W samej rzeczy, załóżmy, że nie wszystkie wyrazy ciągu (10) są różne i niech u_q oznacza pierwszy z nich, który jest równy jednemu z poprzedzających, np.:

$$u_q = u_p, \qquad (11)$$

gdzie $p < q$ (przyczem oczywiście $q > 1$). W myśl (9) mamy zatem

$$u_q = \varphi(u_{q-1}), \qquad (12)$$

zatem u_q jest elementem mnogości T, a że u_1 do T nie należy, więc $u_q \neq u_1$, skąd, w myśl (11), $u_p \neq u_1$, co dowodzi, że $p \neq 1$, czyli, że $p > 1$. Mamy więc też, w myśl (9): $u_p = \varphi(u_{p-1})$ i przeto równość (11) daje, wobec (12):

$$\varphi(u_{q-1}) = \varphi(u_{p-1}). \qquad (13)$$

Lecz $\varphi(u)$ oznacza element mnogości T, odpowiadający elementowi u mnogości M w odpowiedniości doskonałej między M i T: wzór (13) pociąga więc za sobą wzór

$$u_{q-1} = u_{p-1},$$

wbrew założeniu, że u_q oznacza *pierwszy* wyraz ciągu (10), równy jednemu z poprzedzających.

Ciąg (10) jest więc ciągiem nieskończonym samych różnych elementów mnogości M. Ta ostatnia posiada więc część przeliczalną, c. b. d. o.

Zestawiając oba dowiedzione twierdzenia, dochodzimy więc do wniosku, że *na to, iżby mnogość była równej mocy z pewną swą częścią właściwą, potrzeba i wystarcza, iżby uważana mnogość posiadała część przeliczalną,* albo, co na jedno wychodzi, iżby istniał ciąg nieskończony, którego wyrazy są różnymi elementami uważanej mnogości.

§ **24.** R. Dedekind[1]) nazywa *nieskończoną* każdą mnogość, która jest równej mocy z pewną swą częścią właściwą. W myśl tego, cośmy udowodnili w poprzednim §, możemy więc powiedzieć, że *na to, iżby dana mnogość była nieskończoną w znaczeniu Dedekinda, potrzeba i wystarcza, iżby istniał ciąg nieskończony, którego wyrazy są różnymi elementami uważanej mnogości.*

Jasnem jest, że mnogość, która jest nieskończoną w znaczeniu Dedekinda, nie jest mnogością skończoną (gdyż żadna mnogość skończona nie może zawierać ciągu nieskończonego różnych elemen-

[1]) *Was sind und was sollen die Zahlen.* Brunświk 1888.

tów): nie jest jednak bynajmniej rzeczą oczywistą, że każda mnogość nie pusta, która *nie jest skończoną* (t. j. której liczba elementów nie daje się wyrazić żadną liczbą naturalną), jest nieskończoną w znaczeniu Dedekinda [1]). Twierdzenie takie udowodnimy później (§ 51), opierając się na pewniku Zermelo.

Trudności, wynikającej z konieczności dowodu, że każda mnogość (nie pusta), która nie jest skończona (w znaczeniu zwykłem), jest nieskończoną w znaczeniu Dedekinda, możnaby, zdawałoby się, uniknąć, nazywając *skończoną* każdą mnogość, która nie jest nieskończoną w znaczeniu Dedekinda, czyli każdą mnogość, która jest różnej mocy z każdą swą częścią właściwą. Lecz będzie to tylko przesunięciem trudności na inne miejsce, gdyż wówczas trzeba będzie dowodzić, że taka definicja mnogości skończonej jest równoważna definicji zwykłej. Poincaré drwi sobie zresztą z tych matematyków, którzyby chcieli w ten sposób definjować pojęcie mnogości *skończonej* [2]).

Co się tyczy cytowanej wyżej rozprawy Dedekinda, to nie miał on bynajmniej zamiaru robienia z niej użytku przy nauczaniu: jest to raczej traktat filozoficzny, mający na celu wykazanie, że pojęcie *liczby* jest wolnym tworem ludzkiego umysłu, niezależnym od pojęcia przestrzeni i czasu.

Oprócz zwykłej definicji mnogości skończonych (opartej na pojęciu liczby naturalnej, które bierzemy z arytmetyki jako gotowe) oraz definicji Dedekindowskiej, istnieją jeszcze inne. Zermelo definjuje np. mnogość skończoną zapomocą pojęcia *porządku*, nazywając *skoń-*

[1]) H. Lebesgue pisze: „Jakkolwiek mocno wątpię, żeby była kiedykolwiek określoną mnogość, która nie byłaby ani skończoną, ani nieskończoną, to jednak niemożliwość takiej mnogości nie wydaje mi się dowiedzioną". (E. Borel: *Leçons sur la th. des fonct.* Paris 1914, p. 156).

[2]) „W takim stopniu (liczni matematycy) spoufalili się z liczbami nadskończonemi, że w końcu doszli do uzależnienia teorji liczb skończonych od teorji liczb kardynalnych Cantora. Ich zdaniem prawdziwie logiczny wykład Matematyki powinien rozpocząć się od ustanowienia własności ogólnych liczb kardynalnych nadskończonych i następnie wyodrębnić z pośród nich pewną malutką klasę—zwykłych liczb całkowitych. Dzięki tej okólnej drodze możnaby było dowieść wszystkich twierdzeń, dotyczących tej małej klasy (to znaczy całej naszej Arytmetyki i Algiebry), nie opierając się na żadnej zasadzie, nie objętej logiką.

Metoda ta jest oczywiście przeciwna wszelkiej zdrowej psychologji: nie tak z pewnością postępował umysł ludzki, gdy budował Matematykę; to też autorzy jej nie zamierzają, jak mniemam, wprowadzić jej do nauczania średniego. Ale czy jest ona przynajmniej logiczna, albo mówiąc trafniej, czy jest poprawna? Wolno o tem wątpić". H. Poincaré: *Nauka i Metoda,* przekład M. H. Horwitza, Warszawa, 1911, str. 108.

czoną każdą mnogość, która daje się w ten sposób uporządkować, iżby każda jej część posiadała element pierwszy oraz element ostatni [1]). Szereg autorów podaje inne jeszcze definicje mnogości skończonych (Russell [2]), Sierpiński [3]), Kuratowski [4]), Zermelo [5])). Przytoczymy tu jeszcze następującą definicję, podaną niedawno przez p Tarskiego [6]).

Mnogość M jest skończona, jeżeli w każdym zbiorze Z jej części istnieje (conajmniej jedna) taka, która nie jest częścią właściwą żadnej części mnogości M, należącej do Z. Albo jeszcze: mnogość M jest skończona, jeżeli w każdym zbiorze Z jej części istnieje taka, dla której żadna część mnogości M, należąca do Z, nie jest częścią właściwą.

§ **25.** Będziemy dalej nazywali *mnogością nieskończoną* mnogość nieskończoną w znaczeniu Dedekinda (§ 24), zaś liczby kardynalne, odpowiadające mnogościom nieskończonym będziemy nazywali *liczbami kardynalnemi pozaskończonemi.*

Niech $\mathfrak{u}$ oznacza jakąkolwiek liczbę kardynalną pozaskończoną, U—mnogość mocy $\mathfrak{u}$. Mnogość U jest więc nieskończoną w znaczeniu Dedekinda i przeto, w myśl udowodnionego w § 23 twierdzenia, posiada część przeliczalną, np.:

$$P = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

(przyczem oczywiście możemy zawsze założyć, że P jest częścią właściwą mnogości U, gdyż w przeciwnym razie wystarczyłoby zamiast części P wziąć część $P_1 = P - (u_1)$).

Połóżmy $U - P = Q$: będzie więc:

$$Q + P = U,$$

przyczem mnogości P i Q nie będą posiadały elementów wspólnych, skąd wnosimy, że:

$$\overline{\overline{Q}} + \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{U}}. \tag{14}$$

[1]) *Acta Mathematica* t. 32 p. 188.

[2]) *Comptes Rendus de la Soc. Math. de France.* Séance du 22 Mars 1911, p. 30.

[3]) *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 106.

[4]) *Fundamenta Mathematicae* I, p. 130.

[5]) *Ueber die Grundlagen der Arithmetik.* Atti del IV Congresso Intern. dei Matematici. Vol. II, Sezione I (Roma 1909).

[6]) *Fundamenta Mathematicae* t. V.

Połóżmy, dalej:

$$R = (u_1, u_3, u_5, \ldots), \qquad S = (u_2, u_4, u_6, \ldots):$$

będzie oczywiście:

$$Q + R + S = U,$$

przyczem mnogości Q, R i S nie będą posiadały elementów wspólnych, skąd:

$$\overline{\overline{Q}} + \overline{\overline{R}} + \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{U}}. \qquad (15)$$

Lecz $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{P}}$ (gdyż obie mnogości są przeliczalne): wzór (15) daje więc, wobec (14):

$$\overline{\overline{U}} + \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{U}},$$

skąd, wobec $\overline{\overline{U}} = \mathfrak{n}$ oraz $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$:

$$\mathfrak{n} + \aleph_0 = \mathfrak{n}. \qquad (16)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej zachodzi wzór (16). Wzór (16) dowodzi też, że każdą mnogość nieskończoną można rozbić na sumę (rozłączną) dwóch mnogości, z których jedna jest tej samej mocy co dana mnogość, druga zaś jest przeliczalna. (Rozkładem takim będzie, w dowodzie powyższym, $U = M + N$, gdzie $M = Q + R$, zaś $N = S$). Innemi słowy: *z każdej mnogości nieskończonej można zawsze w ten sposób usunąć przeliczalną mnogość elementów, iżby moc jej nie uległa zmianie.*

Niech, dalej, $\mathfrak{n}$ oznacza daną liczbę kardynalną pozaskończoną, n — dowolną daną liczbę naturalną. Wobec (16) oraz w myśl wzoru (4) z § 21 znajdujemy w jednej chwili:

$$\mathfrak{n} + n = (\mathfrak{n} + \aleph_0) + n = \mathfrak{n} + (\aleph_0 + n) = \mathfrak{n} + \aleph_0 = \mathfrak{n},$$

czyli:

$$\mathfrak{n} + n = \mathfrak{n} \qquad (17)$$

dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej $\mathfrak{n}$ oraz każdej liczby naturalnej n.

Wzory (16) i (17) dowodzą, że *moc mnogości nieskończonej nie ulega zmianie, jeżeli do niej dołączyć dowolną skończoną albo przeliczalną mnogość elementów.*

W szczególności, ze wzoru (17) wynika, że dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej $\mathfrak{n}$ mamy:

$$\mathfrak{n} + 1 = \mathfrak{n}. \qquad (18)$$

Łatwo widzieć, że *wzór* (18) *jest dla liczb kardynalnych pozaskończonych charakterystyczny.* W samej rzeczy, załóżmy, że $\mathfrak{u}$ jest liczbą kardynalną, dla której zachodzi wzór (18), i niech U oznacza mnogość, taką iż:

$$\overline{\overline{U}} = \mathfrak{u}. \qquad (19)$$

Oznaczmy, dalej, przez V mnogość, utworzoną przez dołączenie do mnogości U jeszcze jednego nowego elementu: będzie oczywiście:

$$\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{U}} + 1,$$

czyli, wobec (19) oraz (18):

$$\overline{\overline{V}} = \mathfrak{u} + 1 = \mathfrak{u},$$

co, wobec (19), dowodzi, że mnogości U i V są równej mocy. Lecz U jest oczywiście częścią właściwą mnogości V: ta ostatnia jest więc równej mocy ze swą częścią właściwą, czyli jest mnogością nieskończoną w znaczeniu Dedekinda; liczba kardynalna $\mathfrak{u}$, jako odpowiadająca, w myśl (19), mnogości nieskończonej U, jest więc pozaskończoną, c. b. d. o.

Dowiedliśmy więc, że na to iżby liczba kardynalna $\mathfrak{u}$ była pozaskończoną, potrzeba i wystarcza, iżby dla niej zachodził wzór (18). Wnosimy stąd natychmiast, że *na to, aby mnogość była nieskończoną w znaczeniu Dedekinda, potrzeba* i *wystarcza, iżby nie zmieniła swej mocy przez dodanie do niej jednego elementu.*

Okażemy jeszcze, że *moc mnogości nieskończonej nie ulega zmianie, jeżeli z niej usunąć skończoną liczbę elementów.*

Niech więc U oznacza daną mnogość nieskończoną, E — jej część skończoną, i połóżmy

$$U - E = V; \qquad (20)$$

powiadam przedewszystkiem, że mnogość V będzie nieskończoną [1]). W samej rzeczy, ponieważ mnogość U jest nieskończoną (w znaczeniu Dedekinda), więc istnieje ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots.$$

którego wyrazy są różnymi elementami mnogości U. Usuwając z tego ciągu te wyrazy, które ewentualnie są elementami mnogości E, otrzy-

---

[1]) Ze wzoru $U = E + V$ oraz z uwagi, że suma dwuch mnogości skończonych jest mnogością skończoną moglibyśmy jedynie wywnioskować (wobec nieskończoności U), że V nie jest mnogością skończoną, co dla dowodu naszego nie jest wystarczające.

mamy przeliczalną część mnogości V: ta ostatnia jest więc nieskończoną. W myśl dowiedzionego wyżej twierdzenia moc mnogości V (jako nieskończonej) nie ulega zmianie przez dodanie do niej mnogości skończonej E, a że przez to, otrzymamy oczywiście, wobec (20), mnogość U, więc mnogości U i V są równej mocy, co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Udowodnimy jeszcze, że *jeżeli, usuwając z danej mnogości przeliczalną mnogość elementów, otrzymujemy mnogość nieskończoną, to ta ostatnia jest równej mocy z daną mnogością.*

W samej rzeczy, niech U oznacza daną mnogość, P — jej część przeliczalną i załóżmy, że mnogość

$$V = U - P \qquad (21)$$

jest nieskończoną. Wobec (21) mamy $U = V + P$, a że, jak dowiedliśmy wyżej, moc mnogości nieskończonej nie ulega zmianie przez dodanie do niej mnogości przeliczalnej, więc mnogości U i V są równej mocy, co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

§ **26.** Niech a oraz $b > a$ będą dwie dane liczby rzeczywiste. Nazywać będziemy *przedziałem* (a, b) zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b;$$

liczby a i b nazywamy *końcami* przedziału (a, b): a — lewym, b — prawym. O danej liczbie x_0 będziemy mówili, że *należy* do przedziału (a, b) (lub, że jest *punktem* tego przedziału), jeżeli

$$a \leqslant x_0 \leqslant b,$$

zaś że x_0 *leży wewnątrz* przedziału (a, b) (lub, że x_0 jest *punktem wewnętrznym* tego przedziału), jeżeli

$$a < x_0 < b.$$

Liczbę $b - a$ nazywamy *długością* przedziału (a, b).

Mówimy, że przedział (c, d) *leży wewnątrz* przedziału (a, b), jeżeli końce c i d leżą wewnątrz przedziału (a, b) (czyli, jeżeli $a < c < d < b$).

O dwuch danych przedziałach (a, b) i (c, d) będziemy mówili, że *nie zachodzą na siebie*, jeżeli nie posiadają wspólnych punktów

wewnętrznych. Możnaby z łatwością okazać, że wtedy albo $b \leqslant c$, albo też $d \leqslant a$ [1]).

Udowodnimy, że *każda mnogość przedziałów, nie zachodzących na siebie, jest albo skończona, albo efektywnie przeliczalna.*

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że możemy ustalić prawo, według którego każdemu danemu przedziałowi (a, b) będzie odpowiadała oznaczona w zupełności (przez ten przedział) liczba wymierna, wewnątrz niego leżąca. W samej rzeczy, niech (a, b) oznacza dany przedział, gdzie $b > a$. Oznaczmy przez m najmniejszą liczbę naturalną, większą od $\frac{1}{b-a}$, zaś przez k — największą liczbę całkowitą $\leqslant ma$ $(k = \mathrm{E}\, ma)$: będzie więc $k+1 > ma$, zatem $\frac{k+1}{m} > a$, zaś wobec $k \leqslant ma$, oraz $\frac{1}{m} < b - a$, znajdujemy $\frac{k+1}{m} < a + (b-a) = b$: liczba wymierna $\frac{k+1}{m}$ leży więc wewnątrz przedziału (a, b); przyporządkujmy ją przedziałowi (a, b). Jasnem jest, że, przy takiem przyporządkowaniu, dwum, niezachodzącym na siebie przedziałom będą odpowiadały zawsze różne liczby wymierne. Wynika stąd natychmiast, że każda mnogość przedziałów, nie zachodzących na siebie, jest efektywnie równej mocy z pewnym zbiorem samych różnych liczb wymiernych, który, jako część mnogości efektywnie przeliczalnej wszystkich liczb wymiernych (§ 20), sam jest skończony, albo efektywnie przeliczalny. Stąd wnosimy natychmiast o prawdziwości naszego twierdzenia [2]).

Liczne zastosowania dowiedzionego twierdzenia spotkamy później.

[1]) Zauważymy jeszcze następujące proste twierdzenie Denjoy: Jeżeli trzy dane przedziały posiadają wspólny punkt wewnętrzny, to zawsze conajmniej jeden z tych trzech przedziałów jest taki, że każdy jego punkt wewnętrzny jest punktem wewnętrznym conajmniej jednego z dwuch pozostałych przedziałów.

[2]) Inny dowód tego twierdzenia opiera się na oczywistej uwadze, że w każdym skończonym odcinku mnogość przedziałów o długościach nie mniejszych od danej liczby dodatniej i nie zachodzących na siebie jest zawsze skończona: wypisujemy więc naprzód przedziały o długościach $\geqslant 1$, leżące na odcinku $(-1,1)$ (o ile są takie wśród danych), porządkując je np. od strony lewej ku prawej, następnie podobnież przedziały o długościach $\geqslant \frac{1}{2}$, leżące na odcinku $(-2,2)$, które nie zostały jeszcze wypisane, po nich podobnież przedziały o długościach $\geqslant \frac{1}{3}$, leżące na odcinku $(-3,3)$ i t. d. Otrzymujemy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony, utworzony z danych przedziałów, nie zachodzących na siebie.

§ **27.** Udowodnimy teraz, że *mnogość wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest efektywnie przeliczalna.*

Niech

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$$

oznacza jakikolwiek ciąg skończony o wyrazach wymiernych. Oznaczmy ogólnie przez $\frac{p_k}{q_k}$ ułamek nieprzywiedlny o naturalnym mianowniku dla liczby w_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ i połóżmy:

$$|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_m| + q_1 + q_2 + \ldots + q_m = N$$

— będzie to pewna liczba naturalna, wyznaczona w zupełności przez uważany ciąg. Ciąg nasz zaliczymy do N-tej klasy.

Jasnem jest, że w ten sposób każdy ciąg skończony o wyrazach wymiernych będzie należał do pewnej klasy (o naturalnym numerze N). Powiadam, że w każdej klasie będziemy mieli skończoną liczbę ciągów.

Z uwagi, że wszystkie q_k są liczbami naturalnemi, zaś wszystkie $|p_k|$ — liczbami całkowitemi nieujemnemi, wynikają natychmiast, wobec wzoru na N, nierówności:

$$N \geqslant m, \ N \geqslant q_k, \ N > |p_k|, \text{ dla } k=1, 2, \ldots, m.$$

Pierwsza z tych nierówności dowodzi, że ciągi N-tej klasy zawierają nie więcej niż N wyrazów; dwie pozostałe nierówności — że licznik i mianownik każdego z tych wyrazów mogą przyjmować tylko skończoną liczbę różnych wartości. A więc i liczba wszystkich ciągów N-tej klasy musi być skończona (jak łatwo obliczyć, mniejsza od $(2N^2)^N$).

Wszystkie ciągi N-tej klasy możemy wypisać w oznaczonym porządku, np. wypisując z dwuch ciągów N-tej klasy zawsze wcześniej ten, który ma mniej wyrazów, zaś w razie równości wyrazów stosując t. zw. *zasadę pierwszych różnic* t. j. wypisując wcześniej ten ciąg, w którym wcześniej spotykamy wyraz mniejszy od zajmującego to samo miejsce wyrazu drugiego ciągu.

Wypiszmy teraz w ustalonym w ten sposób porządku wszystkie ciągi 1-szej klasy, po nich wszystkie ciągi 2-giej klasy, dalej wszystkie ciągi 3-ciej klasy i t. d. Otrzymamy w ten sposób oznaczony w zupełności ciąg nieskończony, którego wyrazami będą wszystkie

ciągi skończone o wyrazach wymiernych [1]). Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Jako natychmiastowy wniosek z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy:

Mnogość wszystkich par dwuch liczb wymiernych jest efektywnie przeliczalna (jako część mnogości efektywnie przeliczalnej). Wynika stąd natychmiast, że *mnogość wszystkich punktów płaszczyzny, mających wymierne spółrzędne, jest efektywnie przeliczalna.* Z tej samej racji *mnogość wszystkich przedziałów o wymiernych końcach jest efektywnie przeliczalna.*

Podobnież wnosimy z naszego twierdzenia, że mnogość wszystkich układów trzech liczb wymiernych jest efektywnie przeliczalna, a stąd w jednej chwili, że *mnogość wszystkich punktów przestrzeni o wymiernych spółrzędnych jest efektywnie przeliczalna.* Z tej samej racji mnogość wszystkich leżących w płaszczyźnie t. zw. kół wymiernych, t. j. kół, których środki mają spółrzędne wymierne i promienie mają długość wymierną, jest efektywnie przeliczalna. Podobnież dla mnogości wszystkich układów czterech liczb wymiernych, oraz mnogości wszystkich kul wymiernych w przestrzeni.

Z twierdzenia naszego wnosimy dalej natychmiast, że mnogość wszystkich ciągów skończonych o różnych wyrazach naturalnych jest efektywnie przeliczalna, innemi słowy, że mnogość wszystkich części skończonych zbioru wszystkich liczb naturalnych jest efektywnie przeliczalna. Wynika stąd natychmiast, że *mnogość wszystkich części skończonych każdego danego zbioru przeliczalnego jest przeliczalna* (bowiem każdy zbiór przeliczalny jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zaś odpowiedniość doskonała między dwoma zbiorami wyznacza oczywiście zarazem odpowiedniość doskonałą między mnogością wszystkich części jednego, a mnogością wszystkich części drugiego z tych zbiorów).

Jako inny jeszcze wniosek z naszego twierdzenia, otrzymujemy: *Mnogość wszystkich wielomianów całkowitych jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych jest efektywnie przeliczalna.*

[1]) Łatwo widzieć, że pierwszymi wyrazami tego ciągu ciągów będą ciągi (wypisane w nawiasach):

(0), (— 1), (1), (0,0), (— 2), $(-\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2})$, (2), (— 1,0), (0, — 1), (0,1), (1,0), (0,0,0), (— 3), $(-\frac{1}{3})$. . . . . .

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że każdemu takiemu wielomianowi

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

odpowiada pewien ciąg skończony o wyrazach całkowitych

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$$

i naodwrót. Uważana mnogość wielomianów jest więc efektywnie równej mocy z pewną częścią mnogości efektywnie przeliczalnej, skąd wynika prawdziwość naszego wniosku.

§ **28.** Twierdzenie: *Mnogość wszystkich liczb algebraicznych jest efektywnie przeliczalna.*

Liczbą algebraiczną nazywamy, jak wiadomo, każdy pierwiastek równania algebraicznego o spółczynnikach całkowitych. (Możnaby też powiedzieć: o spółczynnikach *wymiernych*, gdyż każde takie równanie daje się w jednej chwili sprowadzić do równania tego samego stopnia o spółczynnikach całkowitych). Jeżeli więc ξ jest liczbą algebraiczną, to musi istnieć (przynajmniej jeden) wielomian

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

o spółczynnikach całkowitych, który dla x równego ξ staje się zerem (t. j. $f(\xi) = 0$) [1]).

Dowodzi się w Algebrze (i to w sposób całkiem elementarny), że żadne równanie n-go stopnia nie może posiadać więcej niż n różnych pierwiastków; wynika stąd, że każde takie równanie wyznacza conajwyżej *skończony* zbiór liczb algebraicznych. A że mnogość wszystkich wielomianów całkowitych jednej zmiennej o spółczynnikach całkowitych jest efektywnie przeliczalna (§ 27), więc możemy je ustawić w oznaczony w zupełnosci ciąg nieskończony

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots.$$

Wypiszmy teraz wszystkie pierwiastki równania $f_1(x) = 0$ (porządkując je np. według rosnących części rzeczywistych, a w razie równych części rzeczywistych — według rosnących spółczynników przy

---

[1]) Jeżeli n jest najniższym stopniem takich wielomianów, to nazywamy ξ *liczbą algebraiczną stopnia* n-tego. Jasnem jest, że każda liczba algebraiczna ma swój oznaczony stopień. (Np. wszystkie liczby wymierne (i tylko one) są liczbami algebraicznemi 1-go stopnia, liczby $\sqrt{2}$, $i = \sqrt{-1}$, $1 + \sqrt{5}$ są liczbami alg. 2-go stopnia i t. d.) Można dowieść, że liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą algebraiczną n-go stopnia.

jednostce urojonej), następnie (w ten sam sposób) pierwiastki równania $f_2(x)=0$, po nich pierwiastki równania $f_3(x)=0$ i t. d. W otrzymanym w ten sposób ciągu nieskończonym liczb algebraicznych zachowajmy tylko te wyrazy, które nie są równe żadnemu z poprzedzających je wyrazów. Otrzymamy oznaczony w zupełności ciąg nieskończony

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

złożony ze *wszystkich*, a przytem *różnych* liczb algebraicznych (że ciąg ten musi być *nieskończony*, wynika już choćby z uwagi, że w każdym razie znajdą się w nim wszystkie liczby wymierne). Dowiedliśmy więc, że mnogość wszystkich liczb algebraicznych jest efektywnie przeliczalna, c. b. d. o.

Wynika stąd też natychmiast, że mnogość wszystkich liczb algebraicznych rzeczywistych jest efektywnie przeliczalna. Potrafimy więc wyznaczyć ciąg nieskończony

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots,$$

utworzony ze wszystkich liczb algebraicznych rzeczywistych. W § 14 ustaliliśmy prawo, według którego każdemu ciągowi nieskończonemu liczb rzeczywistych odpowiada liczba rzeczywista (określona w zupełności przez dany ciąg), różna od każdego z wyrazów uważanego ciągu. Niech ξ_1 oznacza liczbę, odpowiadającą według tego prawa ciągowi (21): będzie to więc oznaczona w zupełności liczba rzeczywista, różna od każdej z liczb algebraicznych. Liczbę (rzeczywistą lub zespoloną), która nie jest algebraiczną, nazywamy *przestępną*. Liczba ξ_1 będzie więc przestępną.

Podobnież, według prawa z § 14, moglibyśmy dalej wyznaczyć oznaczoną w zupełności liczbę rzeczywistą ξ_2, różną od każdej z liczb ciągu nieskończonego:

$$\xi_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$$

Oznaczając ogólnie przez ξ_n wyznaczoną według naszego prawa liczbę rzeczywistą, różną od każdej z liczb ciągu nieskończonego:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots,$$

otrzymamy oznaczony w zupełności ciąg nieskończony:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

różnych liczb przestępnych.

Dowiedliśmy więc, że *istnieje nieskończenie wiele liczb przestępnych* (rzeczywistych). Mnogość wszystkich liczb przestępnych rzeczy-

wistych otrzymujemy oczywiście, usuwając z mnogości wszystkich liczb rzeczywistych przeliczalną mnogość wszystkich liczb rzeczywistych algebraicznych. Lecz w § 25 dowiedliśmy, że jeżeli, usuwając z danej mnogości przeliczalną mnogość elementów, otrzymujemy mnogość nieskończoną, to ta ostatnia jest równej mocy z daną mnogością. Wnosimy stąd, że *mnogość wszystkich liczb przestępnych rzeczywistych jest równej mocy z mnogością wszystkich liczb rzeczywistych.*

Powyższy dowód istnienia liczb przestępnych zawdzięczamy Cantorowi, który go ogłosił w r. 1873 [1]). (Praca, w której się ten dowód zawiera, jest jedną z pierwszych prac z Teorji mnogości). W tymże roku Hermite dowiódł, że liczba e (zasada logarytmów naturalnych) jest przestępną, dając przez to prosty przykład takich liczb. W niespełna dziesięć lat później Lindemann udowodnił, że i liczba π jest przestępna, a co za tem idzie, że kwadratura koła nie jest wykonalna zapomocą cyrkla i linjału [2]).

Na innej zupełnie zasadzie jest oparty, wcześniejszy od Cantorowego, dowód Liouville'a, że istnieją liczby przestępne [3]) (Liouville wyprowadza pewną własność W_n, którą musi spełniać każda liczba algebraiczna stopnia n-go i buduje następnie liczby, nie spełniające własności W_n przy żadnem naturalnem n, a więc liczby przestępne. Jedną z nich jest np. liczba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0{,}110001000000000000000001 0\ldots)$$

---

[1]) *Journal für reine u. ang. Mathematik*, Bd. 77.

[2]) *Mathematische Annalen* Bd. 20 (1892). Dla dowodu niemożliwości wykreślenia zapomocą cyrkla i linjału kwadratu, mającego to samo pole co i dane koło, nie jest zresztą konieczny dowód przestępności liczby π: wystarczyłoby (i zarazem potrzeba) okazać, że liczba π nie da się utworzyć z liczby 1 zapomocą skończonej liczby działań wymiernych oraz działania wyciągania pierwiastka kwadratowego. Zagadnienie kwadratury koła należy odróżniać od pytania, czy można rozbić koło na skończoną liczbę części (niekoniecznie zapomocą cyrkla i linjału), z których by można złożyć kwadrat. Pytanie to (na które odpowiedź również jest przecząca) nie ma bezpośredniego związku z kwadraturą koła.

[3]) *Journal de Mathématiques* 16 (1851).

ROZDZIAŁ IV.

Mnogości mocy continuum.

§ **29.** Mnogości, które są równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, nazywamy *mocy continuum* [1]). Liczbę kardynalną, odpowiadającą mnogościom mocy continuum będziemy oznaczali literą gotycką $\mathfrak{c}$.

Mnogość wszystkich liczb rzeczywistych jest oczywiście nieskończoną (gdyż zawiera części przeliczalne, np. mnogość wszystkich liczb naturalnych): mamy więc, w myśl twierdzenia, udowodnionego w § 25 (wzory (16) i (17)):

$$\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} \tag{1}$$

oraz

$$\mathfrak{c} + n = \mathfrak{c}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

t. j. do każdej mnogości mocy continuum możemy dołączyć skończoną albo przeliczalną mnogość elementów, nie zmieniając przez to jej mocy. Podobnież wnosimy, że z każdej mnogości mocy continnum możemy usunąć dowolną skończoną liczbę elementów, nie zmieniając jej mocy.

Rozumując, jak w § 28 przy wyznaczaniu mocy zbioru liczb przestępnych, dochodzimy z łatwością do wniosku, że każdy dany ciąg nieskończony liczb rzeczywistych wyznacza pewien inny ciąg nieskończony, którego wyrazy są różnemi liczbami rzeczywistemi i przytem

[1]) *Kontinua* są to pewne mnogości punktowe, z któremi spotkamy się później; w szczególności, *kontinuum linjowe* (ograniczone) jest to zbiór wszystkich punktów skończonego odcinka (z włączeniem granic). Wszystkie kontinua są tej samej mocy, mianowicie mocy continuum.

różnemi od każdego z wyrazów danego ciągu. Jeżeli więc z mnogości wszystkich liczb rzeczywistych usuniemy jakąkolwiek podmnogość przeliczalną, to pozostała mnogość będzie jeszcze nieskończoną. Tę samą własność będzie oczywiście posiadała każda mnogość mocy continuum: stąd, w myśl twierdzenia z § 25, wnosimy, że z każdej mnogości mocy continuum możemy usunąć przeliczalną mnogość elementów, nie zmieniając przez to jej mocy. Twierdzenie to możnaby wyrazić w postaci wzoru:

$$\mathfrak{c} - \aleph_0 = \mathfrak{c}.$$

Zauważymy jednak, że wogóle nie można mówić o różnicy dwuch liczb kardynalnych (równych lub różnych). Pochodzi to stąd, że jeżeli znamy moce dwuch mnogości, to przez to nie znamy jeszcze mocy ich różnicy. Np. mnogość wszystkich liczb naturalnych oraz mnogość wszystkich liczb naturalnych parzystych są przeliczalne, jak również ich różnica (jako mnogość wszystkich liczb naturalnych nieparzystych); natomiast różnica mnogości wszystkich liczb naturalnych oraz wszystkich liczb naturalnych, większych od liczby 5, składa się z pięciu tylko elementów, pomimo, że i tutaj odjemna oraz odjemnik są przeliczalne. Różnica $\aleph_0 - \aleph_0$ nie może więc być żadną określoną liczbą kardynalną.

§ **30.** O mnogościach, które są efektywnie równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, będziemy mówili, że są *efektywnie mocy continuum*.

Mnogość X wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich jest, jak łatwo widzieć, efektywnie równej mocy z mnogością Y wszystkich liczb, leżących wewnątrz przedziału (0,1). Aby ustalić odpowiedniość doskonałą między elementami mnogości X oraz Y, wystarczy każdej liczbie rzeczywistej dodatniej x przyporządkować liczbę:

$$y = \frac{x}{1+x},$$

należącą oczywiście do mnogości Y: dowód, że przyporządkowanie to będzie wzajemnie-jednoznaczne, nie nastręcza żadnych trudności.

Podobnież mnogość wszystkich liczb rzeczywistych ujemnych będzie efektywnie równej mocy z mnogością wszystkich liczb, leżących wewnątrz przedziału (— 1,0). Wynika stąd, dalej, natychmiast, że mnogość wszystkich liczb rzeczywistych jest efektywnie równej mocy z mnogością wszystkich liczb, leżących wewnątrz przedziału (— 1,1). Ta ostatnia jest więc efektywnie mocy continuum.

Łatwo, dalej, ustalić odpowiedniość doskonałą między mnogością wszystkich liczb, leżących wewnątrz przedziału (— 1,1), a mnogością wszystkich liczb, leżących wewnątrz jakiegokolwiek skończonego przedziału (a, b). Wystarczy w tym celu każdej liczbie x, leżącej wewnątrz przedziału (— 1,1), przyporządkować liczbę

$$y = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}$$

leżącą wewnątrz (a, b): czytelnik udowodni z łatwością, że przyporządkowanie to jest wzajemnie-jednoznaczne.

Zatem: *mnogość wszystkich liczb rzeczywistych, leżących wewnątrz każdego danego przedziału skończonego* (a, b), *jest efektywnie mocy continuum.* Włączenie (jednej lub obu) granic przedziału mocy nie zmieni, w myśl (2).

Mnogość S wszystkich liczb, leżących wewnątrz przedziału (— 1,1) możemy oczywiście uważać jako sumę (rozłączną) dwuch mnogości: mnogości M wszystkich liczb przedziału (— 1,0) z wyłączeniem dolnej, a włączeniem górnej jego granicy, oraz mnogośei N wszystkich liczb, leżących wewnątrz przedziału (0,1). Mnogości M i N (nie posiadające elementów wspólnych) mają, jak wiemy, moc $\mathfrak{c}$; tę samą moc ma jednak i ich suma S: wynika stąd wzór

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}. \qquad (3)$$

Wzór ten dowodzi zarazem, że *każda mnogość mocy continuum daje się rozbić na dwie części (rozłączne), z których każda jest mocy continuum.*

Drogą łatwej indukcji wnosimy ze wzoru (3), że suma jakiejkolwiek skończonej liczby składników, z których każdy jest równy liczbie kardynalnej $\mathfrak{c}$, wynosi zawsze $\mathfrak{c}$. Mamy więc też

$$n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Okażemy jeszcze, że

$$\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}. \qquad (4)$$

Weźmy w tym celu pod rozwagę zbiór P wszystkich układów (k, x), gdzie k oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, zaś x — jakąkolwiek liczbę rzeczywistą nieujemną, mniejszą od jedności. Ponieważ zbiór wszystkich liczb całkowitych jest przeliczalny, zaś zbiór wszystkich liczb nieujemnych, mniejszych od jedności — mocy continuum,

więc, w myśl definicji iloczynu dwuch liczb kardynalnych, będziemy mieli

$$\overline{\overline{P}} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c}. \tag{5}$$

Z drugiej strony, każdemu układowi (k, x) przyporządkujmy liczbę rzeczywistą $t = k + x$. Przyporządkowanie to wyznacza, jak łatwo widzieć, odpowiedniość doskonałą między wszystkimi układami, tworzącymi mnogość P, a wszystkiemi liczbami rzeczywistemi t: jest więc

$$\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}. \tag{6}$$

Wzory (5) i (6) dają wzór (4), c. b. d. o.

Ze wzoru (4) wnosimy, dalej, z łatwością, że *każda mnogość mocy continuum jest sumą rozłączną ciągu nieskończonego mnogości, z których każda jest mocy continuum.*

§ **31.** Obliczymy teraz iloczyn $\mathfrak{c} . \mathfrak{c}$. Weźmy w tym celu pod rozwagę mnogość U wszystkich układów (x, y), gdzie x i y są liczby rzeczywiste dodatnie, nie większe od jedności.

Ponieważ, jak wiemy (§ 30), mnogość wszystkich liczb dodatnich, nie większych od jedności, jest mocy continuum, więc, w myśl definicji iloczynu dwuch liczb kardynalnych, będziemy mieli $\overline{\overline{U}} = \mathfrak{c} . \mathfrak{c}$. Wyznaczymy teraz moc mnogości U na innej jeszcze drodze.

Niech (x, y) oznacza dany układ, należący do mnogości U. Rozwińmy liczby x i y na ułamki dziesiętne istotnie nieskończone (t. j. zawierające nieskończenie wiele cyfr różnych od zera).

Weźmy pod rozwagę rozwinięcie liczby x na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony. Połączmy, po przecinku, w jeden symbol — który nazwiemy symbolem K ö n i g a — każdą cyfrę różną od zera wraz ze wszystkiemi bezpośrednio poprzedzającemi ją zerami (t. j. nie oddzielonemi od danej cyfry żadną cyfrą różną od zera). Symbole takie, biorąc je w nawiasy [ ], wypiszmy po kolei w tym porządku, w jakim je otrzymamy. Więc np. dla liczby

$$x = 0{,}7105000400301820 06 \ldots.$$

symbolami takimi będą

$$a_1 = [7],\ a_2 = [1],\ a_3 = [05],\ a_4 = [0004],\ a_5 = [003],\ a_6 = [01],$$
$$a_7 = [8],\ a_8 = [2],\ a_9 = [006],\ \ldots.$$

W każdym razie więc otrzymamy dla naszej liczby x pewien oznaczony w zupełności ciąg takich symboli:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

przyczem ciąg ten będzie nieskończony, skoro, jak zakładamy, rozwijaliśmy liczbę x na ułamek dziesiętny istotnie nieskończony.

Każdej więc liczbie rzeczywistej x, gdzie $0 < x \leqq 1$, odpowiada oznaczony w zupełności ciąg nieskończony symboli K ö n i g a

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

ale też, jak łatwo widzieć, i naodwrót: każdy taki ciąg nieskończony odpowiada pewnej, w zupełności oznaczonej liczbie rzeczywistej dodatniej, nie większej od jedności. (Otrzymamy ją, wypisując zero jako całość, zaś po przecinku wypisując wszystkie kolejne symbole danego ciągu, odrzuciwszy nawiasy, ale zachowując odpowiednie zera).

Przedstawiwszy w powyższy sposób liczby

$$x \sim \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$
oraz
$$y \sim \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

wyznaczymy liczbę

$$u \sim \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, \ldots\},$$

dla której określający ją ciąg symboli K ö n i g a otrzymamy, wstawiając wyrazy ciągu dla y między wyrazy ciągu dla x.

Każdemu układowi (x, y), należącemu do mnogości U, odpowiada w ten sposób oznaczona w zupełności liczba u, spełniająca nierówności

$$0 < u \leqq 1.$$

Ale, jak łatwo widzieć, i naodwrót: każda taka liczba

$$u \sim \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$$

odpowiada oznaczonemu układowi (x, y), należącemu do mnogości U; aby go otrzymać, wystarczy położyć

$$x \sim \{c_1, c_3, c_5, \ldots\}, \qquad y \sim \{c_2, c_4, c_6, \ldots\}$$

Ustaliliśmy więc odpowiedniość doskonałą między wszystkimi układami (x, y) mnogości U oraz wszystkiemi liczbami rzeczywistemi u, dla których $0 < u \leqq 1$. Wynika stąd, że mnogość U jest mocy continuum, zatem że $\overline{\overline{U}} = \mathfrak{c}$, a że wyżej znaleźliśmy $\overline{\overline{U}} = \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c}$, więc

$$\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c} = \mathfrak{c}. \qquad (7)$$

Wzór ten doprowadza do ciekawego paradoksu, jeżeli mu nadać interpretację geometryczną, odwzorowując układy (x, y) zapomocą punktów płaszczyzny.

Z pewników geometrji (np. z pewników Hilberta [1])) wynika, że istnieje odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczna między zbiorem wszystkich punktów prostej, a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, a więc też, że istnieje odpowiedniość doskonała między zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, a zbiorem wszystkich układów (x, y) dwuch liczb rzeczywistych [2]).

Opierając się na istnieniu tych odpowiedniości dochodzimy, wobec wzoru (7), do wniosku, że *wszystkie punkty kwadratu można w sposób wzajemnie-jednoznaczny odwzorować na skończonym odcinku.* Twierdzenie to (znalezione przez Cantora w r. 1878) przedstawia ciekawy paradoks, gdyż skłonni byliśmy uważać pole kwadratu za nieskończenie obfitsze w punkty niż odcinek prostej. Przyczyna tego paradoksu, jak twierdzi Klein [3]) leży w tem, że narazie trudno uwolnić się od przedstawiania sobie *ciągłości* we wzajemnem przyporządkowaniu punktów płaszczyzny i prostej. W samej rzeczy atoli uważane przyporządkowanie jest tak nieciągłe, jak tylko być może: niszczy ono wszystko, co charakteryzuje figury płaskie, względnie linjowe, jako takie: wszystko, z wyjątkiem ich mocy, tak naprzykład, jak gdybyśmy wszystkie punkty kwadratu wsypali do worka i tam je dobrze wymieszali [4]).

Słusznie też twierdzi Couturat: „Zatem, to, co właściwie i istotnie stanowi kontinua wielowymiarowe (jak kontinuum linjowe), to nie jest zbiór punktów, lecz zbiór stosunków. Fakt ten posiada oczywistą doniosłość filozoficzną: dowodzi on, ostatecznie, że przestrzeń nie jest zwyczajną «mnogością» (multiplicité), lecz mnogością uporządkowaną; usprawiedliwia on też pogląd Leibniza, który w przestrzeni widział przedewszystkiem porządek“ [5]).

[1]) D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie.*

[2]) Fakty te uważane są zazwyczaj w geometrji analitycznej za oczywiste. Pierwszy Cantor podniósł (w r. 1872), że chodzi tu o nowy pewnik. W tymże roku R. Dedekind zwrócił uwagę na ścisły związek tej kwestji z wyobrażeniem naszem o ciągłości linji prostej. Że kwestje te nie mogły się wyłonić wcześniej niż w drugiej połowie XIX wieku, jest zrozumiałem: nie było wcześniej ścisłej definicji liczb niewymiernych.

[3]) Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. T. I. Lipsk 1908, p. 560.

[4]) Funkcje, wyrażające omawiane przyporządkowanie, rzeczywiście nie są ciągłe; nie można jednak o nich powiedzieć, jak to czyni Klein, że są tak nieciągłe, jak tylko być może: przeciwnie, możnaby dowieść, że są one *nawpół-ciągłe* i przeto należą do klasy funkcyj najbardziej zbliżonych do funkcyj ciągłych.

[5]) *Les principes des Mathématiques.* Paryż 1905, p. 134.

Ze wzoru (7) wnosimy z łatwością o istnieniu odpowiedniości doskonałej między wszystkimi punktami (nieograniczonej) płaszczyzny oraz wszystkimi punktami prostej (albo wszystkiemi liczbami rzeczywistemi): dowodzi to, że, teoretycznie przynajmniej — położenie punktu na płaszczyźnie może być określone zapomocą jednej tylko spółrzędnej (rzeczywistej).

§ **32.** Twierdzenie Cantora, że płaszczyznę można w sposób wzajemnie-jednoznaczny odwzorować na prostej (względnie kwadrat na odcinku), jak gdyby niweczy nasze pojęcie o wymiarach. Lecz jest tak tylko na pierwszy rzut oka. W istocie obala ono tylko nasze fałszywe, oparte jedynie na intuicji, przypuszczenie, że mnogości punktów przestrzeni o różnej liczbie wymiarów są różnej mocy. Zasadniczej różnicy między przestrzeniami o różnej liczbie wymiarów należy szukać gdzieindziej: wynika ona z faktu, że *przestrzenie o różnej liczbie wymiarów nie dadzą się przekształcać jedna na drugą w sposób wzajemnie-jednoznaczny i ciągły*. Dowód tego twierdzenia w całej jego rozciągłości wymaga różnych wiadomości z teorji mnogości punktowych. Na tem miejscu tylko udowodnimy analitycznie, że przestrzeń dwuwymiarowa nie może być odwzorowana w sposób wzajemnie-jednoznaczny i ciągły na przestrzeni jednowymiarowej. Okażemy mianowicie, że *nie istnieje taka funkcja ciągła $f(x, y)$ dwuch zmiennych rzeczywistych x i y* (chociażby tylko ciągła ze względu na każdą z tych zmiennych zosobna), *któraby dla różnych układów liczb rzeczywistych x, y przybierała zawsze różne wartości rzeczywiste.*

Załóżmy, dla dowodu, że funkcja taka $f(x, y)$ istnieje. Połóżmy

$$\varphi(x) = f(x, 0) \tag{8}$$

— będzie to więc funkcja ciągła zmiennej x.

Oznaczmy $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$: z założenia, że różnym układom x, y odpowiadają różne wartości funkcji $f(x, y)$, oraz wobec (8), wynika, że $a \neq b$, np. $a < b$. Funkcja $\varphi(x)$, jako ciągła w przedziale (0,1), przybiera więc w tym przedziale każdą wartość y, zawartą między $\varphi(0) = a$ i $\varphi(1) = b$ [1]): istnieje więc w przedziale (0,1) (conajmniej jedna) wartość x_0, taka, iż $\varphi(x_0) = \frac{a+b}{2}$.

[1]) Nie wchodzimy tu w to, czy funkcja $\varphi(x)$ nie będzie dla $0 \leq x \leq 1$ przybierała żadnych innych wartości, prócz należących do przedziału (a, b), jakkolwiek możnaby tego dowieść.

Połóżmy dalej

$$\psi(y) = f(x_0, y)$$

— będzie to więc funkcja ciągła zmiennej y, przyczem będzie oczywiście

$$\psi(0) = f(x_0, 0) = \varphi(x_0) = \frac{a+b}{2},$$

zatem, wobec $a < b$:

$$a < \psi(0) < b,$$

skąd, wobec ciągłości funkcji $\psi(y)$ dla $y = 0$, wnosimy, że dla dostatecznie małych dodatnich y musi być również:

$$a < \psi(y) < b,$$

czyli

$$a < f(x_0, y) < b.$$

Nierówność ta jest atoli dla $y \neq 0$ niemożliwa, gdyż funkcja $\varphi(x) = f(x, 0)$ przybiera dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ wszystkie wartości przedziału (a, b), zaś funkcja $f(x, y)$ daje różne wartości dla różnych układów zmiennych x, y.

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Zmieniając nieznacznie powyższy dowód, możnaby z łatwością okazać, że żaden kawałek płaszczyzny nie może być w sposób wzajemnie-jednoznaczny i ciągły odwzorowany na prostej lub jakiejkolwiek jej części.

Powróćmy do wzoru (7). Ponieważ istnieje odpowiedniość doskonała między mnogością wszystkich liczb zespolonych $x + yi$ a mnogością wszystkich par dwuch liczb rzeczywistych (x, y), więc wzór (7) dowodzi, że *mnogość wszystkich liczb zespolonych jest mocy continuum.*

Wzór (7) dowodzi też (§ 17), że *każda mnogość mocy continuum może być uważana jako suma mnogości, gdzie zbiór wszystkich składników jest mocy continuum, zaś każdy składnik jest mnogością również mocy continuum.*

§ **33.** Ponieważ mnogość wszystkich liczb dodatnich, nie większych od jedności, jest mocy $\mathfrak{c}$, więc, w myśl własności potęgi liczb kardynalnych (§ 19), mnogość P wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach dodatnich $\leqslant 1$ jest mocy $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$.

Niech

$$p = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \tag{9}$$

oznacza jakikolwiek element mnogości P (a więc ciąg nieskończony

o wyrazach dodatnich $\leqslant 1$). Dla każdej z liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots$ wyznaczmy odpowiedni ciąg symboli K ö n i g a (§ 31):

$$x_1 \sim \{a_1', \ a_2', \ a_3', \ \ldots\},$$
$$x_2 \sim \{a_1'', \ a_2'', \ a_3'', \ \ldots\},$$
$$x_3 \sim \{a_1''', \ a_2''', \ a_3''', \ \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wyrazy ciągu podwójnego $a_m^{(n)}$ symboli K ö n i g a ustawmy np. zapomocą *metody przekątnych* (§ 22) w ciąg zwykły. Ciąg ten wyznacza nam pewną liczbę rzeczywistą

$$x \sim \{a_1', a_1'', a_2', a_1''', a_2'', a_3', \ldots\},$$

przyczem będzie $0 < x \leqslant 1$: liczbę tę przyporządkujmy ciągowi (9).

Naodwrót, mając liczbę rzeczywistą x, taką iż $0 < x \leqslant 1$, i wyznaczając odpowiadający jej ciąg symboli K ö n i g a

$$x \sim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\},$$

możemy z łatwością wyznaczyć ciąg nieskończony (9), należący do P, któremu liczba ta jest przyporządkowana: wystarczy położyć:

$$x_1 \sim \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}, \alpha_{15}, \ldots\}$$
$$x_2 \sim \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{14}, \alpha_{20}, \ldots\}$$
$$x_3 \sim \{\alpha_4, \alpha_8, \alpha_{13}, \alpha_{19}, \alpha_{26}, \ldots\}$$
i t. d.,

jak to czytelnik sam zechce bliżej zbadać.

Przyporządkowanie nasze ustala więc odpowiedniość doskonałą między wszystkimi elementami mnogości P a wszystkiemi liczbami dodatniemi $\leqslant 1$. Wnosimy stąd, że $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$, a że przedtem znaleźliśmy $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$, więc mamy wzór

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \tag{10}$$

Wzór (10) dowodzi zarazem, jak łatwo widzieć, że *zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych jest mocy continuum* (zatem też, że zbiór wszystkich punktów przestrzeni o $\aleph_0$ wymiarach jest mocy $\mathfrak{c}$). Ponieważ mnogość wszystkich liczb zespolonych jest mocy continuum (§ 32), więc wzór (10) dowodzi też, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach zespolonych jest mocy

continuum. Stąd łatwy wniosek, że mnogość wszystkich szeregów potęgowych (o współczynnikach zespolonych)

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

(lub nawet ogólniejszych szeregów, postaci $\mathfrak{P}(z-a)$) jest mocy continuum. (Dla dowodu wystarcza zauważyć, że istnieje odpowiedniość doskonała między mnogością wszystkich szeregów potęgowych o spółczynnikach zespolonych, a mnogością wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach zespolonych: dla ustalenia jej wystarczy każdemu szeregowi potęgowemu przyporządkować ciąg kolejnych jego spółczynników).

§ **34.** Udowodnimy teraz, że zbiór Q wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazy mogą przyjmować tylko dwie wartości 0 i 1, też jest mocy continuum: będzie stąd oczywiście wynikało, że

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \tag{11}$$

Zaliczmy w tym celu do mnogości R każdy taki ciąg nieskończony, należący do zbioru Q, który zawiera tylko skończoną liczbę wyrazów równych jedności, zaś do mnogości S — każdy taki ciąg, należący do Q, który zawiera nieskończenie wiele wyrazów, równych jedności: będziemy oczywiście mieli $Q = R + S$, przyczem mnogości R i S nie będą posiadały elementów wspólnych. Wynika stąd, jak wiemy, wzór

$$\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{R}} + \overline{\overline{S}}. \tag{12}$$

Każdemu ciągowi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

należącemu do mnogości R, przyporządkujmy liczbę

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots$$

W ten sposób, jak łatwo widzieć, każdemu ciągowi, należącemu do mnogości R, będzie odpowiadała pewna liczba wymierna (pewien skończony ułamek dwójkowy $\geqslant 0$ oraz < 1), przytem różnym ciągom mnogości R zawsze różne liczby wymierne. Mnogość R będzie więc równej mocy z pewną częścią mnogości przeliczalnej (wszystkich liczb wymiernych), a że jest ona oczywiście nieskończoną, więc będzie przeliczalną, czyli

$$\overline{\overline{R}} = \aleph_0. \tag{13}$$

Dla wyznaczenia mocy mnogości S przyporządkujmy również każdemu ciągowi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

należącemu do zbioru Q, liczbę

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots \tag{14}$$

— będzie to oczywiście ułamek dwójkowy, istotnie nieskończony (gdyż wyrazów a_n mamy teraz nieskończenie wiele różnych od zera). Opierając się na uwadze, że każdy ułamek dwójkowy istotnie nieskończony (14) przedstawia pewną liczbę rzeczywistą dodatnią $\leqq 1$, oraz że każda liczba rzeczywista dodatnia $\leqq 1$ rozwija się w jeden tylko sposób na ułamek dwójkowy istotnie nieskończony (14) (podobnie jak to ma miejsce dla ułamków dziesiętnych), wnosimy natychmiast, że przyporządkowanie nasze ustala odpowiedniość doskonałą między wszystkimi ciągami, tworzącymi mnogość S, a wszystkiemi liczbami rzeczywistemi dodatniemi $\leqq 1$. Mnogość S jest więc mocy continuum, czyli

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{c}. \tag{15}$$

Wzory (13) i (15) dają, wobec (12):

$$\overline{\overline{Q}} = \aleph_0 + \mathfrak{c},$$

skąd, w myśl wzoru (1) z § 29:

$$\overline{\overline{Q}} = \mathfrak{c},$$

co, jak zauważyliśmy na początku tego §, pociąga za sobą wzór (11).

Łatwo widzieć, że gdybyśmy w dowodzie powyższym, zamiast ułamków o zasadzie 2, użyli ułamków o naturalnej zasadzie $n > 1$, otrzymalibyśmy w ten sam sposób wzór

$$n^{\aleph_0} = \mathfrak{c}, \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots.$$

W myśl twierdzenia, udowodnionego w § 19, liczba kardynalna $2^{\aleph_0}$ przedstawia moc zbioru wszystkich części jakiejś danej mnogości przeliczalnej: stąd, w myśl (11), wnosimy natychmiast, że *dla każdej mnogości przeliczalnej zbiór wszystkich jej części jest mocy continuum.* Ponieważ zaś w § 27 dowiedliśmy, że zbiór wszystkich części skończonych każdej danej mnogości przeliczalnej jest przeliczalny, więc, wobec $\mathfrak{c} - \aleph_0 = \mathfrak{c}$ (§ 29), wnosimy dalej, że *dla każdej mnogości przeliczalnej zbiór wszystkich jej części nieskończonych jest mocy continuum.*

Ze wzoru (11), podnosząc obie jego strony do potęgi o wykładniku $\aleph_0$, otrzymujemy

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph})^{\aleph_0}; \qquad (16)$$

lecz, w myśl własności potęgi (§ 19), oraz wobec wzoru $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ (§ 22):

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

skąd, wobec (16), (11), otrzymujemy w jednej chwili wzór (10), udowodniony w § 33 na innej drodze.

Ze wzoru (11) wynika też z łatwością wzór (7) (§ 31): w samej rzeczy, wzór (11) daje, wobec własności iloczynu potęg o tej samej podstawie, oraz wobec wzoru $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ (§ 21):

$$\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \,.\, 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

§ **35.** Udowodnimy teraz wzór

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \qquad (17)$$

W tym celu wystarczy oczywiście okazać, że mnogość M wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych jest mocy continuum. Każdemu ciągowi nieskończonemu

$$n_1, \ n_2, \ n_3, \ldots .$$

o wyrazach naturalnych przyporządkujmy ułamek łańcuchowy nieskończony:

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots .}}} \qquad (18)$$

— będzie to pewna liczba niewymierna przedziału (0, 1). Ponieważ z drugiej strony, jak wiadomo, każda liczba niewymierna przedziału (0,1) rozwija się, i to w jeden tylko sposób, na ułamek łańcuchowy nieskończony (arytmetyczny) (18), więc przyporządkowanie nasze ustala odpowiedniość doskonałą między mnogością M a mnogością N, utworzoną ze wszystkich liczb niewymiernych przedziału (0,1). Jest więc $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$. Lecz mnogość N otrzymujemy oczywiście, usuwając z mnogości wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1) (będącej, jak wiemy, mocy continuum) przeliczalną mnogość liczb wymiernych

tego przedziału: ponieważ atoli przez to, jak wiemy (§ 29), nie zmienimy mocy continuum, więc mamy $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{c}$. Jest więc też $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{c}$, skąd wynika wzór (17), c. b. d. o.

Zauważymy, że łatwo też dowieść, iż *zbiór Z wszystkich ciągów nieskończonych rosnących o wyrazach naturalnych jest mocy continuum.* W tym celu wystarczy oczywiście okazać, że zbiór Z jest równej mocy z mnogością M wszystkich ciągów o wyrazach naturalnych. Aby ustalić odpowiedniość doskonałą między mnogościami Z i M wystarczy, jak łatwo widzieć, każdemu ciągowi nieskończonemu rosnącemu o wyrazach naturalnych

$$s_1, \ s_2, \ s_3, \ldots . \tag{19}$$

przyporządkować ciąg nieskończony o wyrazach naturalnych

$$s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, s_4 - s_3, \ldots .$$

Możnaby też, dla dowodu, że $\overline{\overline{Z}} = \mathfrak{c}$, ustalić odpowiedniość doskonałą między ciągami, tworzącymi zbiór Z, a wszystkiemi liczbami rzeczywistemi dodatniemi < 1, przyporządkowywując każdemu ciągowi (19), należącemu do Z, liczbę

$$\frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_2}} + \frac{1}{2^{s_3}} + \ldots .$$

ROZDZIAŁ V.

Porównywanie mocy zbiorów.

§ 36. Niech $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą dwie dane liczby kardynalne, M i N— dwie mnogości, takie iż:

$$\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m} \text{ oraz } \overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}. \qquad (1)$$

Przypuśćmy, że mnogość N jest równej mocy z pewną częścią mnogości M, natomiast mnogość M nie jest równej mocy z żadną częścią mnogości N. Jasnem jest, że jeżeli M_1 i N_1 są jakiekolwiek mnogości, byleby takie, iż:

$$\overline{\overline{M}}_1 = \mathfrak{m} \text{ oraz } \overline{\overline{N}}_1 = \mathfrak{n},$$

to znowu mnogość N_1 będzie równej mocy z pewną częścią mnogogości M_1, natomiast mnogość M_1 nie będzie równej mocy z żadną częścią mnogości N_1.

Gdyby uważane liczby kardynalne były skończone, to mielibyśmy oczywiście w danym przypadku nierówność:

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}.$$

Dla liczb kardynalnych, które nie są skończone, nie określiliśmy jeszcze, co oznacza podobna nierówność. Całkiem jednak naturalnem będzie przyjęcie następującej ogólnej umowy:

Jeżeli $\mathfrak{m}$ *i* $\mathfrak{n}$ *są dwie dane liczby kardynalne, M i N dwie mnogości, których mocami są odpowiednio liczby* $\mathfrak{m}$ *i* $\mathfrak{n}$, *oraz jeżeli mnogość N jest równej mocy z pewną częścią mnogości M, ale mnogość M nie jest równej mocy z żadną częścią mnogości N, to fakt ten wyrażamy, pisząc:*

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n} \textit{ albo } \mathfrak{n} < \mathfrak{m}.$$

(Na to więc, żeby dla dwuch liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ zachodziła nierówność $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, potrzeba i wystarcza, aby istniały mnogości M i N, spełniajęce warunek (1), i takie, iż N jest równej mocy z pewną częścią mnogości M, lecz M nie jest równej mocy ż żadną częścią mnogości N. Łatwo też widzieć, że możemy nadto zakładać, iż mnogość N jest częścią mnogości M: w przeciwnym bowiem razie wystarczyłoby mnogość N zastąpić przez tę część mnogości M, która jest z nią równej mocy).

Jasnem jest, że fakt, czy dla dwóch danych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ zachodzi, czy też nie zachodzi nierówność $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, zależy jedynie od uważanych liczb kardynalnych, lecz nie zależy od obioru poszczególnych mnogości M i N, spełniających warunek (1).

Jasnem jest, dalej, że nierówność

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$$

wyklucza nierówność

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n},$$

jakoteż równość

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n};$$

każde więc dwie liczby kardynalne mogą być połączone *conajwyżej* jednym z trzech znaków

$$>, =, <.$$

Nie mamy jednak prawa już teraz twierdzić, że każde dwie dane liczby kardynalne *mogą być zawsze* połączone jednym z tych trzech znaków. Aby módz to twierdzić, należałoby przedewszystkiem dowieść, że nie jest możliwym przypadek, w którym z dwuch danych mnogości M i N żadna nie jest równej mocy z żadną częścią drugiej. (Gdyby bowiem przypadek taki dla dwuch danych mnogości M i N zachodził, to, w myśl przyjętych definicji równości i nierówności liczb kardynalnych, nie moglibyśmy liczb kardynalnych, odpowiadających mnogościom M i N, połączyć żadnym z trzech znaków: $=$, $>$, $<$).

Dalej, należałoby jeszcze zbadać, co będzie wtedy, jeżeli *każda* z dwóch danych mnogości M i N jest równej mocy z pewną częścią drugiej.

Dopiero po rozstrzygnięciu tych dwuch kwestji moglibyśmy wypowiedzieć się ostatecznie w sprawie tak zwanej *trichotomji*, czyli możności łączenia każdych dwuch danych liczb kardynalnych jednym z trzech znaków: $>$, $=$, $<$.

Wynika stąd, że nie możemy narazie twierdzić, iż jeżeli dla dwuch danych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ *nie* zachodzi nierówność

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n},$$

to dla liczb tych zachodzi nierówność

$$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n},$$

gdyż przesądzałoby to sprawę trichotomji.

W jednym z późniejszych rozdziałów udowodnimy, że trichotomja jest równoważną t. zw. pewnikowi Zermelo (wyboru) (§ 105).

W każdym razie możemy już teraz twierdzić, że pewne liczby kardynalne dadzą się ze sobą *porównywać co do wielkości*, to znaczy łączyć jednym z wiadomych trzech znaków. Np. jeżeli n oznacza liczbę naturalną, zaś $\mathfrak{m}$ — liczbę kardynalną, która nie jest skończoną, to, w myśl definicji nierówności, będzie

$$\mathfrak{m} > n$$

(łatwo bowiem dowieść drogą indukcji, że w każdej mnogości, która nie jest skończoną (ani pustą) istnieje dla każdej liczby naturalnej n część, zawierająca n elementów).

W szczególności, dla każdej liczby naturalnej n mamy

$$n < \aleph_0;$$

łatwo też widzieć, że nierówność ta jest zarazem konieczną i wystarczającą na to, iżby liczba kardynalna n była skończoną.

Dalej, jeżeli $\mathfrak{n}$ oznacza liczbę kardynalną pozaskończoną, to mamy

$$\mathfrak{n} \geq \aleph_0;$$

jeżeli nadto $\mathfrak{n} \neq \aleph_0$, to mamy stąd

$$\mathfrak{n} > \aleph_0.$$

Więc np. mamy nierówność

$$\mathfrak{c} > \aleph_0.$$

Łatwo dowieść, że stosunek nierówności jest *przechodni*, t. j. że nierówności

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{n} > \mathfrak{p}$$

pociągają za sobą zawsze nierowność

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{p}.$$

Dla dowodu wystarczy oprzeć się na uwadze, że część części danej mnogości jest znowu częścią tejże mnogości.

Zauważymy jednak, że nierówności między liczbami kardynalnemi nie posiadają wszystkich tych własności, co nierówności między liczbami skończonemi. Np. dla liczb skończonych nierówność $a > b$ pociąga za sobą nierówność $a + c > b + c$, natomiast mamy

$$\mathfrak{c} > \aleph_0,$$

ale jednocześnie

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \aleph_0 + \mathfrak{c}.$$

Podobnież mamy

$$\mathfrak{c} > \aleph_0, \text{ a jednocześnie } \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{c} = \aleph_0 \,.\, \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{c} > \aleph_0 > 2, \text{ a jednocześnie } \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

W jednym z dalszych paragrafów (§ 42) udowodnimy, że nierówności ze znakiem $\geqq$ (lub $\leqq$) można dodawać, mnożyć i potęgować stronami, podobnie jak nierówności dla liczb skończonych.

§ **37.** *Twierdzenie: Zbiór wszystkich części każdej danej mnogości ma moc większą od uważanej mnogości.*

Dowód. Niech M oznacza daną mnogość, zaś T — zbiór wszystkich części mnogości M (włączając i część pustą). Każda mnogość, złożona z jednego tylko elementu mnogości M jest oczywiście częścią mnogości M, a więc należy do T: stąd łatwy wniosek, że mnogość M jest równej mocy z pewną częścią mnogości T.

Załóżmy, z drugiej strony, że zbiór T jest równej mocy z pewną częścią M_1 mnogości M. Istnieje więc odpowiedniość doskonała między zbiorami T i M_1.

W myśl tej odpowiedniości każdej części C mnogości M jest przyporządkowany pewien element m mnogości M_1. Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich tych elementów m mnogości M_1, które nie są elementami odpowiednich części C mnogości M, którym są przyporządkowane.

Zbiór Z sam jest oczywiście częścią mnogości M (może zresztą pustą): jest mu więc przyporządkowany pewien element mnogości M_1: oznaczmy go przez m_0. Zbadamy dwa założenia: m_0 należy do Z i m_0 nie należy do Z. Jeżeli m_0 należy do Z, to z definicji zbioru Z wynika, że element m_0 nie jest elementem tej części mnogości M, której jest przyporządkowany, czyli, że m_0 nie jest elementem zbioru Z, skąd sprzeczność.

Jeżeli zaś m_0 nie należy do Z, a więc, jeżeli element m_0 nie jest elementem tej części mnogości M, której jest przyporządkowany, to, w myśl definicji zbioru Z, element m_0 musi być zaliczony do Z, skąd znowu sprzeczność.

Sprzeczność mamy więc w każdym razie, co dowodzi niemożliwości założenia, że $\overline{T} = \overline{M}_1$. Mnogość T nie jest więc równej mocy z żadną częścią mnogości M, a że, jak wiemy, mnogość M jest równej mocy z pewną częścią mnogości T, więc mamy $\overline{T} > \overline{M}$, c. b. d. o.

Niech teraz $\mathfrak{m}$ oznacza dowolną daną liczbę kardynalną, M — mnogość mocy $\mathfrak{m}$. W § 19 dowiedliśmy, że mnogość wszystkich części mnogości M ma moc $2^{\mathfrak{m}}$: w myśl dowiedzionego przed chwilą twierdzenia mamy więc nierówność:

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m} \tag{2}$$

dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$.

Dla liczb $\mathfrak{m}$ skończonych nierówność (2) znaną jest z arytmetyki; dla $\mathfrak{m} = \aleph_0$ otrzymujemy:

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0,$$

czyli, wobec $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (§ 34): $\mathfrak{c} > \aleph_0$, co na innej drodze dowiedliśmy już w § 36.

§ 38. Przyjmijmy w nierówności (2) z § 37: $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$: otrzymamy nierówność:

$$2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} \tag{3}$$

Łatwo dowieść, że lewa strona nierówności (3) jest liczbą kardynalną, odpowiadającą mnogości wszystkich funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej. W samej rzeczy, w myśl definicji potęgi (§ 18), liczbą kardynalną tej mnogości jest:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \tag{4}$$

Lecz, w myśl wzoru (11) z § 34, mamy $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, skąd, wobec własności potęgi, oraz w myśl wzoru (4) z § 30:

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}:$$

wzór (4) daje więc

$$\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}},$$

c. b. d. o. A więc: *mnogość wszystkich funkcyj rzeczywistych zmiennej rzeczywistej* (ciągłych i nieciągłych) *ma moc* $\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}}$, *większą niż*

continuum. Tę samą moc ma też, jak łatwo widzieć, mnogość wszystkich (ciągłych i nieciągłych) funkcyj zmiennej zespolonej.

Poznaliśmy więc dotychczas trzy różne liczby kardynalne pozaskończone:

$$\aleph_0 < \mathfrak{c} < \mathfrak{f},$$

z których pierwsza odpowiada mnogości wszystkich liczb naturalnych, druga — mnogości wszystkich liczb rzeczywistych, trzecia — mnogości wszystkich funkcyj. Samo przez się nasuwa się teraz pytanie, czy *między* temi liczbami kardynalnemi niema innych, w szczególności, czy niema liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, któraby spełniała nierówność

$$\aleph_0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{c},$$

innemi słowy, *czy istnieje mnogość mocy większej niż mnogości przeliczalne, a jednocześnie mniejszej niż continua?* Pytanie to, znane pod nazwą *zagadnienia continuum* (Kontinuumproblem)[1]) nie jest dotychczas rozstrzygnięte (nawet zapomocą t. zw. pewnika Zermelo) i należy do najważniejszych, a zarazem najtrudniejszych zagadnień teorji mnogości. Są nawet tacy, którzy nie wykluczają możliwości, że zagadnienie to nie da się wogóle rozstrzygnąć bez wprowadzenia jakiegoś nowego pewnika. Podobnież nie wiadomo, czy istnieją liczby pośrednie między $\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{f}$.

Założenie, że między liczbami $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ niema żadnej pośredniej, znane jest pod nazwą *hypotezy continuum*[2]). Z założenia tego wysnuto cały szereg wniosków, z których żaden nie doprowadził dotąd do sprzeczności, natomiast wiele z nich udowodniono następnie na innej drodze[3]).

W § 94 udowodnimy, że hypoteza continuum (w tej formie, w jakiej podaliśmy ją tutaj) jest równoważna założeniu, że każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych, który nie jest przeliczalny, ma moc continuum.

[1]) Przez *zagadnienie continuum* (w znaczeniu szerszem) niektórzy rozumieją zadanie ewentualnego wyznaczenia wszystkich liczb kardynalnych, zawartych między $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ (względnie wyznaczenia miejsca liczby $\mathfrak{c}$ w ciągu t. zw. *alefów*)

[2]) Cantor wypowiada hypotezę continuum w nieco innej formie (Cantorsche Kontinuumhypothese: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$): zapomocą pewnika Zermelo można udowodnić, że oba sformułowania są równoważne[3]).

[3]) Zob. W. Sierpiński: *Sur l'hypothèse du continu.* Fundamenta Mathematicae t. V (1923). Zob. też § 94.

§ **39.** Zajmiemy się teraz pytaniem, *ile jest różnych liczb kardynalnych pozaskończonych?* Dotąd poznaliśmy tylko trzy: łatwo jednak, opierając się na nierówności (2) z § 37, wyznaczyć cały ciąg nieskończony różnych liczb kardynalnych. Połóżmy mianowicie:

$$\mathfrak{m}_0 = \aleph_0, \text{ zaś } \mathfrak{m}_k = 2^{\mathfrak{m}_{k-1}}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots;$$

wobec nierówności $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$, będziemy mieli:

$$\mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \mathfrak{m}_3 < \ldots.$$

Okażemy jeszcze, że istnieje nieskończenie wiele liczb kardynalnych, większych od wszystkich wyrazów wypisanego ciągu. W tym celu udowodnimy następujące:

Twierdzenie. Jeżeli $M_1, M_2, M_3, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym mnogości, w którym każdy następny wyraz jest mnogością mocy większej niż poprzedzający, to suma $S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ wszystkich mnogości uważanego ciągu jest mnogością mocy większej od mocy każdego z jego wyrazów.

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są spełnione. Każda z mnogości M_k będzie oczywiście częścią mnogości S: dla dowodu naszego twierdzenia wystarczy więc okazać, że mnogość S nie jest równej mocy z żadną częścią żadnej z mnogości M_k. Załóżmy, że, przeciwnie, mnogość S jest równej mocy z pewną częścią mnogości M_p. Wówczas mnogość M_{p+1}, będąca częścią mnogości S, byłaby tembardziej równej mocy z pewną częścią mnogości M_p i przeto nie mogłaby zachodzić nierówność $\overline{\overline{M}}_{p+1} > \overline{\overline{M}}_p$, wbrew założeniu. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Niech teraz M_0 oznacza mnogość wszystkich liczb naturalnych. Oznaczmy ogólnie, przy naturalnem k, przez M_k mnogość wszystkich części mnogości M_{k-1} i połóżmy:

$$S_0 = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots.. \tag{5}$$

Będziemy mieli, jak wiemy (§ 37):

$$\overline{\overline{M}}_0 < \overline{\overline{M}}_1 < \overline{\overline{M}}_2 < \ldots..$$

i przeto, wobec (2) i w myśl udowodnionego przed chwilą twierdzenia:

$$\overline{\overline{S}}_0 > \overline{\overline{M}}_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Oznaczmy, dalej, przez S_k mnogość wszystkich części mnogości S_{k-1}: będziemy mieli znowu:

$$\overline{\overline{S_0}} < \overline{\overline{S_1}} < \overline{\overline{S_2}} < \ldots .$$

Kładąc $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}_k$, $\overline{\overline{S_k}} = \mathfrak{s}_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, będziemy więc mieli:

$$\mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots < \mathfrak{s}_0 < \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{s}_2 < \ldots .$$

Podobnież moglibyśmy wyznaczyć jeszcze nieskończenie wiele liczb kardynalnych, większych od każdego z wyrazów wypisanych dwuch ciągów, i t. d.

Przy tworzeniu coraz większych mocy moglibyśmy się też posługiwać twierdzeniem:

Twierdzenie. Dla każdego ciągu nieskończonego mnogości istnieje mnogość mocy większej od każdego z wyrazów ciągu.

Dowód. Niech

$$M_1, M_2, M_3, \ldots ..$$

oznacza dany ciąg nieskończony mnogości. Połóżmy

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots ..$$

i oznaczmy przez T zbiór wszystkich części mnogości S. Mnogość S jest, jak wiemy, równej mocy z pewną częścią mnogości T; zatem też, przy wszelkiem naturalnem k, mnogość $M_k \subset S$ jest równej mocy z pewną częścią mnogości T. Z drugiej strony, mnogość T nie jest równej mocy z żadną częścią mnogości $S \supset M_k$ (gdyż, jak wiemy, $\overline{\overline{T}} > \overline{\overline{S}}$), i, tembardziej, z żadną częścią mnogości M_k. Mamy więc:

$$\overline{\overline{T}} > \overline{\overline{M_k}}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots ,$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika natychmiast, że *nie istnieje ciąg nieskończony mnogości, posiadający tę własność, że każda mnogość jest równej mocy z jednym z jego wyrazów.*

§ **40.** Zajmiemy się teraz dowodem pewnego twierdzenia, mającego szerokie zastosowanie przy wyznaczaniu mocy zbiorów. W tym celu omówimy przedewszystkiem pewne własności odwzorowań.

Przypuśćmy, że dane jest odwzorowanie mnogości M na mnogości N (§ 18): każdemu elementowi m mnogości M przyporządkowany jest więc pewien element $f(m)$ mnogości N (tak zwany *obraz* elementu m). Niech, dalej, P oznacza jakąkolwiek część mnogości M:

zbiór obrazów wszystkich elementów mnogości P będziemy nazywali obrazem mnogości P i oznaczali przez $f(P)$. Jasnem jest, że jeżeli p jest elementem mnogości P, to $f(p)$ jest elementem mnogości $f(P)$, czyli: *obraz elementu danej mnogości jest elementem jej obrazu.* Jasnem jest też, że *obraz części danej mnogości jest częścią jej obrazu.* Obrazem mnogości pustej jest oczywiście mnogość pusta.

Przypuśćmy, dalej, że P jest sumą szeregu (skończonego lub nieskończonego) mnogości (mogących posiadać elementy wspólne):

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots . ;$$

łatwo widzieć, że będziemy mieli:

$$\varphi(P) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2) + \varphi(P_3) + \ldots . ,$$

czyli, że *obraz sumy jest sumą obrazów.* Dla dowodu wystarczy wziąć pod uwagę, że obraz elementu sumy musi być obrazem elementu jednego (conajmniej) ze składników, jakoteż naodwrót.

Zauważymy atoli, że analogiczne twierdzenie nie zachodzi wogóle dla iloczynu: obraz iloczynu dwuch mnogości może nie być iloczynem ich obrazów. Np. jeżeli $P_1 = (a)$, $P_2 = (b)$, przyczem $a \neq b$, i jeżeli obrazem elementu a, jakoteż obrazem elementu b jest ten sam element c, to będziemy mieli $f(P_1) . f(P_2) = (c)$, natomiast mnogość $f(P_1 P_2)$ będzie pustą, wobec $P_1 P_2 = 0$. Możnaby jednak z łatwością dowieść, że *obraz iloczynu jest zawsze częścią iloczynu obrazów,* oraz, że jeżeli uważane odwzorowanie jest takie, iż różnym elementom odpowiadają zawsze różne obrazy, to obraz iloczynu jest iloczynem obrazów.

Lemmat. Jeżeli A, B, C są trzy mnogości, takie iż

$$A \supset B \supset C \text{ oraz } A \sim C,$$

to $A \sim B$.

D o w ó d. Skoro $A = C$, więc istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne mnogości A na mnogości C: oznaczamy je przez φ.

Będzie więc

$$\varphi(A) = C. \tag{6}$$

Połóżmy

$$A - B = D, \tag{7}$$

$$P = D + \varphi(D) + \varphi\varphi(D) + \varphi\varphi\varphi(D) + \ldots . ,[1] \tag{8}$$

$$Q = B - \varphi(P). \tag{9}$$

[1]) $\varphi\varphi(D)$ oznacza tu obraz mnogości $\varphi(D)$, i t. d. Zauważymy, że mnogość P możnaby określić bez pomocy szeregu nieskończonego, jako iloczyn wszystkich podmnogości X mnogości A, zawierających jednocześnie D oraz $f(X)$ (Z e r m e l o).

Wobec (8) znajdujemy (w myśl własności obrazów sumy):

$$\varphi(P) = \varphi(D) + \varphi\varphi(D) + \varphi\varphi\varphi(D) + \ldots,$$

skąd, wobec (8):

$$P = D + \varphi(P) \tag{10}$$

Wobec (7) mamy $D \subset A$. Lecz, jeżeli $X \subset A$, to mamy $\varphi(X) \subset \varphi(A)$, zatem w myśl (6) i wobec $A \supset C$, mamy $\varphi(X) \subset A$. Zatem: obraz każdej części zbioru A jest znowu częścią tego zbioru. Ponieważ zaś każdy składnik szeregu (8) (poczynając od drugiego) jest obrazem poprzedzającego składnika, zaś pierwszy składnik jest częścią zbioru A, więc wszystkie składniki szeregu (8) są częściami zbioru A, skąd: $P \subset A$ i przeto, wobec (6):

$$\varphi(P) \subset C. \tag{11}$$

Wobec $A \supset B$, oraz (7), mamy:

$$A = B + D. \tag{12}$$

Wobec (11) oraz $C \subset B$, mamy $\varphi(P) \subset B$: wzór (9) daje więc

$$B = Q + \varphi(P). \tag{13}$$

Wzory (12) i (13) dają, wobec (10):

$$A = P + Q. \tag{14}$$

Wobec (10), mamy:

$$PQ = DQ + Q\varphi(P). \tag{15}$$

Lecz, wobec (9), $Q\varphi(P) = 0$, zaś, wobec (7), $DB = 0$, skąd, w myśl (13): $DQ + D\varphi(P) = 0$ i, tembardziej, $DQ = 0$: wzór (15) dowodzi więc, że

$$PQ = 0.$$

Wzór (14) daje więc rozkład mnogości A na dwa składniki rozłączne (co do których zresztą nie przesądzamy, czy nie są puste).

Określimy teraz funkcję $\theta(m)$ elementów mnogości A, kładąc

$$\left.\begin{array}{ll} \theta(m) = \varphi(m), & \text{jeżeli } m \varepsilon P \\ \text{oraz } \theta(m) = m, & \text{jeżeli } m \varepsilon Q \end{array}\right\} \tag{16}$$

— będzie to więc odwzorowanie jednoznaczne mnogości A, przyczem będzie oczywiście $\theta(P) = \varphi(P)$, $\theta(Q) = Q$, skąd, w myśl (14) i (13):

$$\theta(A) = \theta(P) + \theta(Q) = \varphi(P) + Q = B.$$

Okażemy teraz, że odwzorowanie θ jest wzajemnie-jednoznaczne: w tym celu wystarcza udowodnić, że

$$\text{jeżeli } m \varepsilon A,\ m' \varepsilon A \text{ oraz } m \neq m', \text{ to } \theta(m) \neq \theta(m'). \qquad (17)$$

Załóżmy więc, że $m \varepsilon A$, $m' \varepsilon A$, oraz $m \neq m'$. Wobec (14) możemy tu rozróżnić następujące 3 przypadki:

1) $m \varepsilon P$ oraz $m' \varepsilon P$. Mamy wówczas, w myśl (16)

$$\theta(m) = \varphi(m), \quad \theta(m') = \varphi(m'),$$

zatem $\theta(m) \neq \theta(m')$, gdyż odwzorowanie φ jest wzajemnie-jednoznaczne.

2) $m \varepsilon Q$ oraz $m' \varepsilon Q$. Wzory (16) dają wówczas

$$\theta(m) = m, \quad \theta(m') = m', \quad \text{skąd} \quad \theta(m) \neq \theta(m').$$

3) m i m' należą do różnych składników sumy (14), np. $m \varepsilon P$, $m' \varepsilon Q$. Wobec $m \varepsilon P$ mamy $\theta(m) \varepsilon \theta(P) = \varphi(P)$, zaś, wobec $m' \varepsilon Q$ oraz (16), mamy $\theta(m') = m' \varepsilon Q$; wobec (9) zaś $Q\varphi(P) = 0$: obrazy $\theta(m)$ oraz $\theta(m')$ należą więc do zbiorów rozłącznych i przeto $\theta(m) \neq \theta(m')$.

Udowodniliśmy więc własność (17). Odwzorowanie θ ustala więc odpowiedniość doskonałą między elementami zbiorów A i B. Lemmat nasz został więc dowiedziony.

Zauważymy, że dowiedliśmy zarazem, że jeżeli $A \supset B \supset C$ i jeżeli dana jest odpowiedniość doskonała między zbiorami A i C, to potrafimy określić odpowiedniość doskonałą między A i B. Możemy więc powiedzieć, że *jeżeli dwa zbiory* A i $C \subset A$ *są efektywnie równej mocy, to każdy zbiór pośredni między nimi* (t. j. zawarty w A i zawierający C) *jest z nimi efektywnie równej mocy.* Udowodnimy teraz

Twierdzenie Cantora-Bernsteina: *Dwie mnogości, z których każda jest równej mocy z pewną częścią drugiej, są równej mocy.*

Dowód. Załóżmy, że M i N są dwie dane mnogości, zaś M_1 i N_1 takie ich części, iż

$$M \sim N_1 \subset N \quad \text{oraz} \quad N \sim M_1 \subset M. \qquad (18)$$

Wobec $N \sim M_1$ istnieje odpowiedniość doskonała między mnogościami N i M_1: w odpowiedniości tej części N_1 mnogości N odpowiada część M_2 mnogości M_1: mamy więc

$$N_1 \sim M_2 \subset M_1,$$

skąd, wobec (18), znajdujemy w jednej chwili

$$M \sim M_2 \quad \text{oraz} \quad M_2 \subset M_1 \subset M$$

W myśl naszego lemmatu mamy więc $M \sim M_1$, skąd, wobec (18): $M \sim N$, c. b. d. o.

Również łatwo moglibyśmy udowodnić, że jeżeli mnogość M jest efektywnie równej mocy z częścią N_1 mnogości N, zaś mnogość N jest efektywnie równej mocy z częścią M_1 mnogości M, to mnogości M i N są efektywnie równej mocy.

§ **41.** Jako zastosowanie twierdz. Cantora-Bernsteina udowodnimy, że *mnogość wszystkich różnych ciągów nieskończonych, różniących się od ciągu kolejnych liczb naturalnych conajwyżej porządkiem wyrazów, jest mocy continuum.*

Oznaczmy uważaną mnogość przez M. Mnogość M będzie oczywiście częścią mnogości N wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych, która, jak dowiedliśmy w § 33, jest mocy continuum. Z drugiej strony, niech

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots. \qquad (19)$$

oznacza jakikolwiek dany ciąg nieskończony, którego wyrazami są liczby 0 i 1: mnogość P wszystkich takich ciągów będzie, jak wiemy (§ 34), mocy $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Podzielmy teraz ciąg liczb naturalnych na kolejne pary (z uwzględnieniem porządku liczb w każdej parze):

$$(1,2);\ (3,4);\ (5,6);\ \ldots;\ (2n-1, 2n);\ \ldots.;$$

weźmy pod rozwagę n-tą parę $(2n-1, 2n)$, gdzie n oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Parę tę pozostawimy bez zmiany, jeżeli $a_n = 0$, jeżeli zaś $a_n = 1$, to zmienimy porządek jej wyrazów, zastępując ją przez parę $(2n, 2n-1)$. (Moglibyśmy też objąć jednocześnie oba przypadki, mówiąc, że parę $(2n-1, 2n)$ zastępujemy zawsze przez parę $(2n-1+a_n,\ 2n-a_n)$). W ten sposób kazdemu ciągowi (19) będzie odpowiadał oznaczony w zupełności ciąg

$$1+a_1, 2-a_1, 3+a_2, 4-a_2, \ldots, 2n-1+a_n, 2n-a_n, \ldots, \qquad (20)$$

różniący się oczywiście conajwyżej porządkiem wyrazów od ciągu kolejnych liczb naturalnych, przyczem różnym ciągom (19) będą oczywiście odpowiadały różne ciągi (20).

Mnogość M_1 wszystkich ciągów (20) jest więc równej mocy z mnogością P, zatem mocy continuum. Mnogość N, która też jest

mocy continuum, jest więc równej mocy z częścią M_1 mnogości M. A że, z drugiej strony, M jest częścią mnogości N, więc, w myśl tw. Cantora-Bernsteina, wnosimy, że mnogości M i N są równej mocy, skąd wynika, że mnogość M jest mocy continuum, c. b. d. o. (Możnaby też z łatwością okazać, że mnogość M jest *efektywnie* mocy continuum).

Otrzymany wynik dowodzi zarazem, że mnogość wszystkich różnych sposobów ustawienia wszystkich liczb naturalnych w ciąg nieskończony jest mocy continuum. Wynika stąd też natychmiast, że *mnogość wszystkich różnych sposobów ustawienia każdego danego zbioru przeliczalnego w ciąg nieskończony jest mocy continuum.*

Moglibyśmy też powiedzieć, że mnogość wszystkich permutacyj z $\aleph_0$ elementów jest mocy continuum.

§ **42.** Zajmiemy się teraz wnioskami z twierdzenia Cantora-Bernsteina, dotyczącymi działań na nierównościach dla liczb kardynalnych.

Udowodnimy przedewszystkiem, że *nierówność*

$$\overline{\overline{M}} \geqslant \overline{\overline{N}} \tag{21}$$

jest równoważna twierdzeniu, że mnogość N jest równej mocy z pewną częścią mnogości M.

W samej rzeczy, jeżeli zachodzi nierówność (21), czyli jeżeli mamy $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$ lub $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, to z definicji równości oraz nierówności liczb kardynalnych wynika, że mnogość N jest równej mocy z pewną częścią mnogości M. Naodwrót, załóżmy, że mnogość N jest równej mocy z pewną częścią mnogości M: jeżeli, z drugiej strony, mnogość M nie jest równej mocy z żadną częścią mnogości N, to, w myśl definicji nierówności dla liczb kardynalnych, będziemy mieli $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$, jeżeli zaś mnogość M jest równej mocy z pewną częścią mnogości N, to, w myśl twierdzenia Cantora-Bernsteina, wnosimy, że mnogości M i N są równej mocy, czyli że $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$. W każdym więc razie mamy nierówność (21).

Wynika stąd, w szczególności, że *część mnogości jest zawsze mocy mniejszej lub tej samej co i sama mnogość.* Zauważymy, że i naodwrót, z twierdzenia tego wynika natychmiast twierdzenie Cantora-Bernsteina.

Łatwo, dalej, dowieść, że dla liczb kardynalnych, *nierówności*

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n} \text{ oraz } \mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n}_1 \tag{22}$$

pociągają za sobą nierówności

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n}+\mathfrak{n}_1,\quad \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n}\mathfrak{n}_1,\quad \mathfrak{m}^{\mathfrak{m}_1} \geqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{n}_1}. \tag{23}$$

W samej rzeczy, oznaczmy przez M, N, M_1 i N_1 mnogości, których liczbami kardynalnemi są odpowiednio $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1$ i $\mathfrak{n}_1$; możemy przytem, jak wiadomo, założyć, że mnogości te nie posiadają elementów wspólnych.

Nierówności (22) wyrażają, że mnogość N jest równej mocy z pewną częścią C mnogości M, zaś mnogość N_1 jest równej mocy z pewną częścią C_1 mnogości M_1. Wynika stąd natychmiast (z uwagi, że mnogości nasze nie posiadają elementów wspólnych), że mnogość $N+N_1$ będzie równej mocy z częścią $C+C_1$ mnogości $M+M_1$, skąd wynika pierwsza z nierówności (23). Dalej, liczba kardynalna $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ odpowiada oczywiście mnogości P wszystkich układów (m, m_1), gdzie m oznacza jakikolwiek element mnogości M, zaś m_1 — jakikolwiek element mnogości M_1, zaś wobec $\overline{\overline{N}}=\overline{\overline{C}}$ oraz $\overline{\overline{N_1}}=\overline{\overline{C_1}}$, liczba kardynalna $\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1$ odpowiada mnogości Q wszystkich układów (c, c_1), gdzie c oznacza jakikolwiek element mnogości C, zaś c_1 — jakikolwiek element mnogości C_1. Lecz mnogość Q stanowi oczywiście część mnogość P: mamy więc $\overline{\overline{P}} \geqslant \overline{\overline{Q}}$, czyli $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 \geqslant \mathfrak{n}\mathfrak{n}_1$.

Dla dowodu ostatniej z nierówności (23) zauważymy, że (wobec $\overline{\overline{C}}=\mathfrak{n}$, $\overline{\overline{C_1}}=\mathfrak{n}_1$) liczba $\mathfrak{n}^{\mathfrak{n}_1}$ odpowiada mnogości R wszystkich odwzorowań mnogości C_1 na mnogości C. Z każdego takiego odwzorowania możemy otrzymać oznaczone w zupełności odwzorowanie mnogości M_1 na mnogości M, jeżeli je uzupełnimy w ten sposób, że każdemu elementowi mnogości M_1, nie należącemu do mnogości C_1 (o ile takowe istnieją) przyporządkujemy zawsze jeden i ten sam element m_0 mnogości M. Mnogości R będzie więc, jak łatwo widzieć, równej mocy z pewną cześcią mnogości wszystkich odwzorowań mnogości M_1 na mnogości M, skąd wynika, że $\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}_1} \geqslant \overline{\overline{R}}$, co, wobec $\overline{\overline{R}}=\mathfrak{n}^{\mathfrak{n}_1}$, daje trzecią z nierówności (23).

Twierdzenie nasze udowodniliśmy zatem w zupełności.

Warto jednak zauważyć, że bez wprowadzenia nowego pewnika (pewnika Zermelo) nie potrafimy dowieść, że z nierówności (dla liczb kandynalnych)

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{m}_1 > \mathfrak{n}_1$$

wynika zawsze nierówność

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{n}+\mathfrak{n}_1,$$

albo też nierówność

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{n}\mathfrak{n}_1.$$

(Nierówność $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ nie pociąga jednak za sobą nierówności $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} > \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$, gdyż np. $\mathfrak{c} > 2$, lecz $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (§ 34); podobnież nierówność $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}$ nie zawsze daje $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} > \mathfrak{m}^{\mathfrak{q}}$, gdyż np. $\aleph_0 > 1$, lecz $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$).

Zauważymy jeszcze, że nawet przy pomocy pewnika Zermelo nie potrafimy dotąd rozstrzygnąć pytania, czy zawsze nierówność

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n} \tag{24}$$

pociąga za sobą nierówność

$$2^{\mathfrak{m}} > 2^{\mathfrak{n}} \tag{25}$$

(Łatwo widzieć, że zagadnienie to jest równoważne następującemu: Czy, jeżeli zbiór wszystkich części mnogości M jest równej mocy ze zbiorem wszystkich części mnogości N, to mnogości M i N muszą być równej mocy?) [1]). Można natomiast udowodnić zapomocą pewnika Zermelo, że nierówność (25) pociąga za sobą zawsze nierówność (24).

Możemy, dalej, z łatwością dowieść, że *suma mnogości jest zawsze mocy $\geqslant$ od mocy każdego ze składników.* W samej rzeczy, załóżmy, że S jest sumą mnogości, z których jedną jest M: składnik M jest więc częścią sumy S, skąd, jak wiemy, wynika, że $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{M}}$, c. b. d. o.

Niech teraz $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ będą dwie dane liczby kardynalne i niech M i N będą mnogości, nie posiadające elementów wspólnych, takie iż $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$. Połóżmy $S = M + N$: będzie więc $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, a że, jak dowiedliśmy, $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{M}}$ oraz $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{N}}$, więc mamy:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{n}.$$

Udowodniliśmy więc, że *suma dwuch liczb kardynalnych jest zawsze $\geqslant$ od każdego ze składników.* Twierdzenie to uogólniamy też natychmiast, drogą łatwej indukcji, na dowolną skończoną liczbę składników. (Suma dwuch liczb kardynalnych *skończonych* jest nadto zawsze *większą* od każdego ze składników, lecz mamy np. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Przy pomocy pewnika Zermelo można udowodnić, że suma dwuch

[1]) Możnaby dowieść, że odpowiedź na to pytanie będzie twierdząca, jeżeli się przyjmie pewnik Zermelo (z którego wynika trichotomja) oraz hipotezę, że dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej $\mathfrak{n}$ niema żadnej liczby kardynalnej pośredniej między $\mathfrak{n}$ oraz $2^{\mathfrak{n}}$. Wówczas bowiem z nierówności $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ wynika nierówność $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\mathfrak{n}}$, skąd, wobec $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$, otrzymujemy nierówność (25).

liczb kardynalnych pozaskończonych jest zawsze równa jednemu ze składników, zob. § 106).

Jako natychmiastowy wniosek, otrzymujemy stąd, że *suma dwuch liczb kardynalnych pozaskończonych jest zawsze $\leqq$ od ich iloczynu*[1]). W samej rzeczy, jeżeli liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ są pozaskończone, to mamy (§ 25) $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + 1$, oraz $\mathfrak{n} = \mathfrak{n} + 1$, skąd w jednej chwili

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = (\mathfrak{m} + 1)(\mathfrak{n} + 1) = \mathfrak{m}\mathfrak{n} + \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 1 = \mathfrak{m}\mathfrak{n} + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}),$$

co daje, jak wiemy, nierówność

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m} + \mathfrak{n}, \quad \text{c. b. d. o.}$$

(Dla liczb skończonych nierówność ta może nie zachodzić, np. $1 . 2 < 1 + 2$).

Możemy też teraz zdać sobie dokładnie sprawę z tego, na czem polega *zagadnienie trichotomji* (§ 36). Załóżmy, że liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ dwuch danych mnogości M i N nie dadzą się ze sobą połączyć żadnym ze znaków $>$, $=$, $<$. Gdyby mnogość M była równej mocy z pewną częścią mnogości N, mielibyśmy, jak wiemy, $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$; podobnież, gdyby mnogość N była równej mocy z pewną częścią mnogości M, mielibyśmy $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{n}$. Jeżeli więc liczby kardynalne $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ nie dadzą się połączyć żadnym z wiadomych trzech znaków, to ani mnogość M nie jest równej mocy z żadną częścią mnogości N, ani też muogość N nie jest równej mocy z żadną częścią mnogości M. Zatem, *aby rozstrzygnąć zagadnienie trichotomji, potrzeba i wystarcza okazać, że nie istnieją takie dwie mnogości, z których żadna nie byłaby równej mocy z pewną częścią drugiej.*

Zauważymy jeszcze, że p. St. L e ś n i e w s k i udowodnił, iż *zagadnienie trichotomji byłoby rozstrzygnięte (pozytywnie) gdybyśmy potrafili dowieść, że suma dwuch mnogości, które nie są obie skończone, nie może być nigdy mocy większej od każdej z tych dwuch mnogości.* W samej rzeczy, załóżmy, że twierdzenie to jest dowiedzione i niech M i N będą dwie dane mnogości, które nie są obie skończone (dla mnogości skończonych bowiem zagadnienie trichotomji nie przedstawia trudności). Mamy oczywiście $\overline{\overline{M + N}} \geqq \overline{\overline{M}}$ oraz $\overline{\overline{M + N}} \geqq \overline{\overline{N}}$, przyczem, w myśl zakładnego twierdzenia, nie może być jednocześnie $\overline{\overline{M + N}} > \overline{\overline{M}}$ oraz $\overline{\overline{M + N}} > \overline{\overline{N}}$. Musi więc być albo $\overline{\overline{M + N}} = \overline{\overline{M}}$.

[1]) Przy pomocy pewnika Z e r m e l o można udowodnić, że suma dwuch liczb kardynalnych, które nie są obie skończone, jest zawsze *równa* ich iloczynowi.

albo też $\overline{\overline{M}} + N = N$: w pierwszym przypadku mamy oczywiście $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{M}}$, w drugim zaś $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$: w każdym więc razie liczby kardynalne, odpowiadające mnogościom M i N, dadzą się połączyć jednym ze znaków $>$, $=$, $<$, c. b. d. o.

§ **43.** Zajmiemy się teraz wyznaczeniem mocy mnogości wszystkich funkcyj ciągłych.

Niech $f(x)$ oznacza funkcję, ciągłą dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej x. Ustawmy w jeden ciąg nieskończony wszystkie liczby wymierne

$$w_1,\ w_2,\ w_3, \dots \tag{26}$$

(np. tak, jak w § 13) i weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony

$$f(w_1),\ f(w_2),\ f(w_3), \dots \tag{27}$$

Każdej funkcji ciągłej $f(x)$ będzie w ten sposób przyporządkowany oznaczony w zupełności ciąg nieskończony o wyrazach rzeczywistych. Powiadam dalej, że różnym funkcjom ciągłym będą odpowiadały *różne* takie ciągi. Dla dowodu załóżmy, że funkcjom ciągłym $f(x)$ i $g(x)$ odpowiada ten sam ciąg (27), czyli, że

$$f(w_n) = g(w_n), \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \tag{28}$$

Niech x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą. Możemy zawsze wyznaczyć ciąg nieskończony $v_1, v_2, v_3, \dots$ o wyrazach wymiernych, zmierzający do x (wystarczy wziąć np. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby x). Wobec (28) będziemy mieli

$$f(v_k) = g(v_k), \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots \tag{29}$$

gdyż każdy wyraz v_k, jako liczba wymierna, jest jedną z liczb (26).

Wobec założenia, że funkcje nasze są ciągłe, oraz z uwagi, że ciąg v_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ zmierza do x, wzór (29) daje, w granicy dla $k = \infty$:

$$f(x) = g(x). \tag{30}$$

Ponieważ zaś równość (30) możemy udowodnić dla każdego rzeczywistego x, więc funkcje $f(x)$ i $g(x)$ nie są różne. *Różnym* funkcjom ciągłym muszą więc odpowiadać *różne* ciągi (27). Możnaby też wobec tego powiedzieć, że każda funkcja ciągła jest wyznaczona przez wartości, jakie przyjmuje dla wymiernych wartości zmiennej.

Wiemy (§ 33), że mnogość C wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych jest efektywnie mocy continuum. Każdej funkcji ciągłej $f(x)$ przyporządkowaliśmy wyżej oznaczony w zupełno-

ści element mnogości C, przyczem dowiedliśmy, że różnym funkcjom będą przyporządkowane różne elementy mnogości C. Wynika stąd, że mnogość M wszystkich funkcyj ciągłych jest efektywnie równej mocy z pewną częścią mnogości C.

Weźmy teraz pod uwagę mnogość P wszystkich (oczywiście ciągłych) funkcyj postaci

$$f(x) = x + a,$$

gdzie a jest pewną stałą rzeczywistą.

Każdej funkcji $x + a$ należącej do P odpowiada pewna liczba rzeczywista a i naodwrót. Mnogość P jest więc efektywnie mocy continuum, a więc efektywnie równej mocy z mnogością C; z drugiej zaś strony mnogość P jest oczywiście częścią mnogości M.

Dowiedliśmy więc, że każda z mnogości M i C jest efektywnie równej mocy z pewną częścią drugiej, skąd, jak udowodniliśmy w § 40, wynika, że mnogość M i C są efektywnie równej mocy.

Udowodniliśmy więc, że *mnogość wszystkich funkcyj ciągłych* (jednej zmiennej rzeczywistej) *jest efektywnie mocy continuum.* (Natomiast mnogość *wszystkich* funkcyj (ciągłych i nieciągłych) jest już, jak wiemy (§ 38), mocy większej niż continuum).

ROZDZIAŁ VI.

Pewnik wyboru i jego zastosowania.

§ **44.** W roku 1904 wypowiedział E. Zermelo pewnik, który wywołał następnie żywą wymianę zdań wśród matematyków. Dzisiaj mamy już całą literaturę w sprawie tego pewnika oraz jego zastosowań. Brzmi on jak następuje:

Pewnik Zermelo: Dla każdej mnogości M, której elementami są zbiory Z, nie puste oraz nie posiadające elementów wspólnych, istnieje conajmniej jedna mnogość N, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z, należących do M.

Wolno nam zawsze przyjąć lub odrzucić [1]) dany pewnik, jeżeli, naturalnie, nie przeczy on intuicji, albo innym, już przyjętym pewnikom. Co się tyczy, w szczególności, pewnika Zermelo, to należy w każdym razie mieć na względzie, że: 1) wiele przypadków szczególnych tego pewnika są prawdziwe (co udowodniono niezależnie od niego); 2) z pewnika Zermelo wysnuto szereg wniosków, z których żaden nie doprowadził do sprzeczności; 3) pewnik Zermelo upraszcza znacznie wiele działów Teorji mnogości i Analizy, oraz jest nieodzownym dla dowodu wielu ważnych twierdzeń tych nauk.

B. Russell [2]) pisze o pewniku Zermelo: „Wielu matematyków, jak sam Zermelo, twierdzi, że pewnik ten jest równie oczywistym jak inne, oraz że można go przyjąć bez wahania. Inni powiadają, że niema żadnej racji dla mniemania, iż pewnik miałby być prawdziwy.

---

[1]) Odrzucenie, czyli nieprzyjęcie danego pewnika należy odróżniać od jego *zaprzeczenia*, t.j. przyjęcia pewnika sprzecznego z danym.

[2]) Comptes Rendus de la Soc. Math. de France. Séance du 22 mars 1911, str. 32 i 33.

P e a n o [1]), udowodniwszy niezależność pewnika, poświęca roztrząsaniu jego prawdziwości tylko uwagę następującą: «Czy mamy teraz sądzić, że zdanie (la proposition) jest prawdziwe, czy też, że jest ono fałszywe? Nasze stanowisko jest neutralne (indifférente)». P. Peano twierdzi w tymże artykule, że sprawa oczywistości jest kwestją psychologiczną, nie dotyczącą logiki". Dla R u s s e l l'a pewnik Zermelo przestaje być oczywistym, skoro się pojmie co on oznacza.

„Możliwe jest — pisze on dalej — że później ktoś znajdzie sprowadzenie do absurdu, które wykaże, że pewnik jest fałszywy. Lecz obecnie wydaje mi się, że jest on tylko wątpliwym. Być może, że jest on prawdziwy, lecz brak mu oczywistości, a wnioski z niego są zadziwiające. W takich okolicznościach wydaje mi się, że dobrze będzie powstrzymać się od jego używania, wyjąwszy przesłanki, które dają nadzieję natknięcia się na absurd i w ten sposób rozstrzygnięcia ujemnego sprawy prawdziwości pewnika".

Wręcz przeciwnego zdania co do pewnika Zermelo jest A. F r a e n k e l, który pisze [2]): „kto jednak zasadę tę zarzuca, nie dlatego iżby prowadziła do sprzeczności logicznych — gdyż takie nie ujawniły się w opartej na aksjomatyce teorji mnogości — lecz dlatego, że nie była ona dotąd uznaną, albo używaną w matematyce, ten może zasadniczo z tem samem prawem odrzucić całą teorję mnogości, i wogóle każdą naukę, a w szczególności całą Matematykę, która ostatecznie również się opiera na niedowiedzionych, mniej lub więcej oczywistych założeniach (pewnikach). Aby uważać zasadę wyboru jako mniej oczywistą niż inne pewniki matematyki, do tego niema poważnej podstawy".

Niezależnie jednak od tego, czy jesteśmy osobiście skłonni przyjąć pewnik Zermelo, czy też nie, musimy w każdym razie liczyć się z jego rolą w teorji mnogości i analizie. Z drugiej zaś strony, skoro pewnik Zermelo był kwestjonowany przez niektórych matematyków [3]), jest ważną rzeczą wiedzieć, jakie twierdzenia są dowodzone przy pomocy tego pewnika. (Zresztą nawet, gdyby nikt nie kwestjonował pewnika Zermelo, nie byłoby rzeczą pozbawioną interesu badanie, jakie dowody opierają się na tym pewniku — co też robi się, jak wiadomo, i dla innych pewników).

[1]) Revista di Matematica 3 ser. t. VIII (1906), str. 145—148.

[2]) *Einleitung in die Mengenlehre.* Berlin 1919, str. 146.

[3]) Zdaniem J. K ö n i g a pewnik Zermelo nie jest pewnikiem w zwykłem znaczeniu tego wyrazu: wynika to stąd już, że można się spierać o to, czy jest on „prawdziwy", czy nie.

§ **45.** Jedną z głównych przyczyn różnicy zdań w sprawie pewnika Zermelo była niewątpliwie różnica w sposobie rozumienia go. Jeżeli więc chcemy mówić o pewniku Zermelo, musimy przedewszystkiem określić ściśle, jak chcemy go rozumieć. Dla ułatwienia sobie tego zadania zaczniemy od najprostszych przypadków uważanego pewnika.

Najprostszym przypadkiem pewnika Zermelo jest ten, w którym mnogość M składa się z jednego tylko zbioru Z. Pewnik Zermelo sprowadza się wówczas oczywiście do zdania, że jeżeli zbiór Z nie jest pusty, to istnieje conajmniej jeden przedmiot, będący elementem zbioru Z. To ostatnie jest jednak prawdziwe, gdyż zdania: „zbiór Z nie jest pusty“ oraz „istnieje conajmniej jeden przedmiot, który jest elementem zbioru Z“ są równoważne (§ 5). Wypowiadając to zdanie, nie chcemy bynajmniej twierdzić, iż potrafimy wskazać jeden element w każdym zbiorze nie pustym, lub że potrafimy *wybrać* pewien element z każdego takiego zbioru. Chodzi tu jedynie o stwierdzenie samego tylko *istnienia* takiego elementu. Lecz co to znaczy „*istnieć*“? To właśnie wielkie i dawne *zagadnienie istnienia* leży u podłoża całego sporu o pewnik Zermelo [1]). „W każdem zagadnieniu istnienia — pisze Lebesgue [2]), należy się liczyć z dwiema różnemi umysłowościami: idealisty i empirysty P. du Bois-Reymonda... Zresztą mamy więcej umysłowości, gdyż można na różny sposób być idealistą lub empirystą.“ — „Idealiści nie silą się na określenie „istnienia“ [3]). „Istnieć“, to znaczy istnieć! Jest to pojęcie najprostsze, a nie dające się sprowadzić do elementów psychicznych, i nie można go objaśniać mniej jasnem, bardziej złożonem pojęciem „definicja“ (domyśla się „dobra“ i „możliwa“). „Według realistów (empirystów) — powiada dalej Janiszewski — istnieje to, co człowiek może zdefinjować. „A więc zupełnie już należy [4]) — z tego punktu widzenia — odmówić istnienia tym klasom przedmiotów, o których z góry wiemy, że nigdy nie będziemy mogli poznać żadnego ich indywiduum...“ „Stąd żądanie Borela: nie zajmować się żadną klasą przedmiotów, dopóki nie możemy podać *metody konstrukcji* przedmiotów tej klasy. Podanie metody konstrukcji jest dopiero — według niego — rzeczywistym dowodem istnienia. Twierdzenia zaś, do-

[1]) Z. Janiszewski: O realizmie i idealizmie w matematyce. *Przegląd filozoficzny* t. 19 (1916) str. 162.

[2]) Bull. de la Soc. Math. de France t. 35.

[3]) Z. Janiszewski: tamże, str. 164.

[4]) Tamże, str. 165.

tyczące przedmiotów, których indywidualnie określić nie można, realiści nazywają metafizycznemi, twierdząc, że nie mogą one mieć żadnego wpływu na twierdzenia matematyki (takiej naturalnie, jak ją oni pojmują, t. j. zajmującej się wyłącznie przedmiotami, które można indywidualnie zdefinjować)".

Według Cantora zbiór jest określony, gdy dane jest kryterjum należenia do zbioru. „Realiści nie przyjmują tej zasady [1]), uważając zbiór za określony dopiero wtedy, gdy — jeśli nie można określić indywidualnie wszystkich elementów zbioru, wtedy przynajmniej — podane jest prawo konstrukcji dowolnego elementu zbioru. Idealiści odrzucają to żądanie..."

Według Lebesgue'a (który jest empirystą) „należy żądać od dowodu istnienia jakiejś kategorji tworów matematycznych, aby zawierał charakterystykę logiczną *jednego* z tych tworów, lecz żądać tylko tego. Pożądanem jest, iżby charakterystyka ta doprowadzała, przynajmniej w prostszych przypadkach, do sposobu efektywnej konstrukcji zdefinjowanego tworu, i aby sposób ten był tem regularniejszy i dokładniejszy, im dane są bardziej szczególne" [2]).

Dowody istnienia danego zbioru Z, t. j. dowody, że dany zbiór nie jest pusty, przeprowadza się najczęściej w ten sposób, że się określa pewien przedmiot p, co do którego się następnie dowodzi, że jest elementem zbioru Z. Nie jest to jednak jedyny sposób dowodzenia istnienia zbioru: możemy bowiem dowodzić istnienia zbioru przez sprowadzenie do niedorzeczności założenia, że uważany zbiór jest pusty (dowód *apagogiczny*). Istnienie danego zbioru może też być wnio-

[1]) Tamże, str. 168.

[2]) H. Lebesgue: Sur certaines démonstrations d'existence. Bull. de la Soc. Math. de France t. 45 (1917), str. 137.

Ciekawe uwagi o różnicy pomiędzy poglądem idealistycznym, a empirystycznym wypowiada Lebesgue w jednym ze swych listów (list do autora z dnia 24.XII.20): „Nie jesteśmy zgodni, idealiści i empiryści, co do znaczenia pewnej liczby wyrazów: istnieć, módz, być, ... Naprzykład, gdy się mówi, jak to ja czynię, stała Eulera C jest wymierna lub niewymierna, wygłasza się, według Pana, prawdę oczywistą; w mojem poczuciu coś się tu postuluje. I, gdyby sposób wyrażania się matematyków był empirystyczny (gdy tymczasem, przeciwnie, jak to zauważył du Bois Reymond, sami empiryści używają języka idealistów), powinienbym powiedzieć: będzie dowiedzione, że liczba C jest wymierną, lub że jest niewymierną, albo też nikt nie będzie nigdy w stanie dowieść ani jednego, ani drugiego. Mówiąc, że stała C jest lub nie jest wymierną, wyrażam, źle, przeświadczenie, że mamy do czynienia z pierwszą lub drugą z powyższych hipotez, i że nie znajdujemy się w przypadku analogicznym do postulatu Euklidesa, w którym to przypadku trzecia alternatywa zachodzi".

skiem z przyjętych pewników lub udowodnionych wcześniej twierdzeń. Dowody istnienia tego rodzaju nie dają nam zazwyczaj bezpośrednio możności wskazania jakiegoś określonego elementu uważanego zbioru, a tem mniej jego konstrukcji [1]).

Jeżeli potrafimy określić poszczególny przedmiot p, posiadający daną własność W, to mówimy, że potrafimy dać *przykład efektywny* przedmiotu, posiadającego własność W. Dowód istnienia danego zbioru nie wymaga więc jeszcze podania efektywnego przykładu elementu tego zbioru.

§ **46.** Jeżeli więc o danym zbiorze wiemy tylko to, że nie jest pustym, to — z punktu widzenia idealisty, a na takim stanąć trzeba, jeżeli się przyjmuje pewnik Zermelo [2]) — nie mamy prawa bynajmniej twierdzić, że potrafimy określić jeden z jego elementów (tak, abyśmy mieli pewność, że dwie osoby mają na myśli ten sam przedmiot), albo że możemy *wybrać* jeden element z tego zbioru. Pewnik Zermelo był też nazywany *pewnikiem wyboru* (Auswahlpostulat, axiome du choix) i niewątpliwie właśnie ta niezbyt szczęśliwa nazwa była jedną z głównych przyczyn, dla których niektórzy matematycy odrzucali ten pewnik [3]). Przyjmując pewnik Zermelo, w rzeczywistości nie przesądzamy możliwości wybrania z każdego zbioru (należącego do danej mnogości zbiorów) po jednym elemencie [4]).

[1]) Np. ze znanego rozumowania Euklidesa wynika, że jeżeli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są jakiekolwiek dane liczby pierwsze (w ilości skończonej), to istnieje liczba pierwsza, różna od każdej z nich. Rozumowanie to nie daje nam jednak bezpośrednio sposobu zbudowania takiej liczby (*wskazać* ją byłoby łatwiej, np. jako najmniejszą liczbę pierwszą, większą od każdej z liczb danego ciągu). Możnaby jednak z łatwością podać metodę konstrukcji takiej liczby: wystarczy np. obliczyć (zapomocą kolejnych dzieleń) najmniejszy większy od jedności dzielnik liczby $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.

[2]) Nie chcemy tu narzucać czytelnikowi punktu widzenia idealistycznego, lub empirystycznego, stwierdzamy tylko, że, kto przyjmuje pewnik Zermelo, ten musi stanąć na stanowisku idealisty.

[3]) „Zwracamy z naciskiem uwagę—pisze Janiszewski (*Poradnik dla Samouków.* Wydanie nowe, 1915, t. I p. 475)—że realiści nie przeczą pewnikowi Zermeli, tylko twierdzą, że jest dla nich niezrozumiałym, pozbawionym treści. Jeżeli zaś przeczą, to zdaniu, którego Zermelo wcale nie wypowiadał, mianowicie, że my umiemy z każdego zbioru zbiorów wykonać wybór postulowany w pewniku Zermeli".

[4]) Oto jeszcze co pisze Lebesgue o pewniku Zermelo w swej *Notice sur les Travaux* (Tuluza 1922, str. 61): „W swej formie pierwotnej pewnik ten polega na przyjęciu, że skoro dane są zbiory, *istnieją* sposoby wybrania z każdego zbioru jednego poszczególnego elementu. Sens wyrazu *istnieją* jest dosyć tajemniczy, gdyż wysłowienie to nie należy uważać jako sprzeczne z tem: dla takiej a takiej rodziny

„Można jeszcze w ten sposób pewnik wyrazić — pisze Zermelo (*Math. Ann.* 65, str. 266) — że zawsze jest możliwem z każdego elementu *M*, *N*, *R*,.... należącego do *T* *wybrać* po jednym poszczególnym elemencie i wszystkie te elementy połączyć w jedną mnogość S_1".

„To ostatnie twierdzenie — pisze Fraenkel (*Math. Ann.* 86, str. 232) — wywołało niejednokrotnie mniemanie, iż jądro pewnika leży w żądaniu możliwości „wyboru wyróżnionego elementu" z każdej z mnogości *M*, *N*,.., albo w żądaniu możliwości „jednoczesnego wyboru" z nich wszystkich. Żadne z tych ujęć nie byłoby trafne. Gdyż dla każdej poszczególnej mnogości *M*, albo, inaczej się wyrażając, dla przypadku, gdy *T* posiada tylko jeden jedyny element *M*, żądany w pewniku wybór daje się *dowieść*: jeżeli bowiem *a* jest jakimkolwiek elementem (w myśl założenia różnej od 0) mnogości *M*, to istnieje mnogość (*a*) w myśl pewnika II [1]) i posiada żądaną własność. Skoro w ten sposób możliwym jest wybór dla każdej poszczególnej mnogości, to jest on naturalnie również możliwy jednocześnie dla wszystkich mnogości zbioru *T*, gdyż wybór, jak każde działanie matematyczne, należy uważać jako coś niezależnego od czasu.

Przytoczone wyżej twierdzenie, wyjaśniające pewnik wyboru, należy tymczasem, jak to zawdzięczam uprzejmemu potwierdzeniu listownemu pana Zermelo, „pojmować tylko jako uwagę, nie dotyczącą teorji"; twierdzenie to, jak również nazwa „pewnik wyboru" tyczy się tylko psychologicznego sposobu przedstawienia, gdy natomiast pewnik, jak to zresztą jego wysłowienie dostatecznie pokazuje, należy uważać, jako czysty *pewnik istnienia* (Existenzaxiom)".

Z prawdziwości pewnika Zermelo dla przypadku, w którym mnogość *M* składa się z jednego tylko zbioru *Z*, wynika natychmiast jego prawdziwość dla każdej *skończonej* mnogości zbiorów. (Przypuśćmy

---

zbiorów żaden człowiek nie będzie mógł nigdy określić odpowiedniości Zermelo. Sprecyzowałem już kiedyś trudności, jakie pociąga za sobą przyjęcie tego pewnika; wskazałem, że, mojem zdaniem, sprowadzałoby się to do powiedzenia, że mielibyśmy prawo rozumować w sposób ścisły, wychodząc z nieścisłych przesłanek. Winienem dodać, że wybitni matematycy są całkiem przeciwnego zdania; p. Hadamard i ja wywymieniliśmy na ten temat, z okazji kongresu filozoficznego w r. 1914, namiętną korespondencję, której ogłoszeniu przeszkodziła wojna. Nie należy tego bynajmniej żałować, gdyż wszystkie te dyskusje są bezużyteczne: sprawa pewnika Zermelo będzie wygraną, w dniu, w którym się otrzyma z niego pożyteczne wyniki dodatnie. Oswojonoby się z tym pewnikiem, używając go, i potrochu rozproszyłyby się trudności natury filozoficznej, które nas zatrzymują obecnie".

[1]) Chodzi tu o pewnik, w myśl którego dla każdego przedmiotu można utworzyć mnogość, złożoną z tego jednego tylko przedmiotu. (*Przyp. autora*).

np. że Z_1 i Z_2 są dwa zbiory nie puste, bez elementów wspólnych: istnieje więc przedmiot p_1, będący elementem zbioru Z_1 oraz przedmiot p_2, będący elementem zbioru Z_2; zbiór N, utworzony z dwuch elementów p_1 i p_2 będzie oczywiście zawierał po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z_1 i Z_2). Nie będziemy się zatrzymywali dłużej na tym przypadku, gdyż nawet autorowie, którzy odrzucają pewnik Zermelo w jego postaci ogólnej, nie podają go w wątpliwość, gdy chodzi o skończoną liczbę zbiorów.

§ **47.** Najprostszym z kolei przypadkiem będzie ten, w którym mnogość M składa się z ciągu nieskończonego zbiorów

$$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots . \quad (1)$$

Czy można wybrać po jednym elemencie z każdego z tych zbiorów? Zbyt literalnie brać tego pytania niepodobna: dla wybrania w rzeczywistości po jednym elemencie z każdego z nieskończenie wielu zbiorów potrzebaby wykonać nieskończenie wiele czynności, na co życie ludzkie jest za krótkie. Lecz postawione zagadnienie można rozumieć w ten sposób, że chodzi o podanie prawa, według którego każdemu z naszych zbiorów odpowiadałby pewien jego element. Wyrażając się ściślej, należy ustalić prawo, któreby każdemu wskaźnikowi naturalnemu n przyporządkowywało oznaczony element p_n zbioru Z_n. Jasnem jest, że pytanie to jest w ścisłym związku z pytaniem następującem: „Czy można ustalić prawo, w myśl którego każdemu danemu zbiorowi Z odpowiadałby pewien element p tego zbioru?“

W wielu przypadkach szczególnych prawo takie istotnie może być podane: np. można ustalić prawo, w myśl którego każdemu zbiorowi liczb wymiernych będzie odpowiadała pewna liczba tego zbioru. Lecz nie potafimy ustalić prawa, w myśl którego każdemu zbiorowi liczb rzeczywistych odpowiadałby oznaczony element tego zbioru. Nie możemy również twierdzić, że dla każdego danego ciągu nieskończonego zbiorów liczb rzeczywistych $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ będziemy umieli określić prawo, według którego każdemu zbiorowi Z_n będzie odpowiadał oznaczony element p_n tego zbioru (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$), jakkolwiek nie znamy dotąd żadnego takiego ciągu zbiorów liczb rzeczywistych, dla któregoby to było niemożliwe.

Ogólniej, nie możemy twierdzić, że dla każdego danego ciągu nieskończonego zbiorów (1) potrafimy wskazać ciąg nieskończony

$$p_1, p_2, p_3, \ldots \quad (2)$$

taki, że, przy wszelkiem naturalnem n, p_n jest elementem zbioru Z_n.

Otóż z pewnika Zermelo wynika, że jeżeli zbiory (1) są rozłączne, to taki ciąg (2) istnieje zawsze, niezależnie od tego, czy potrafimy go wyznaczyć, czy też nie.

Zatem, przyjmując pewnik Zermelo, nie przesądzamy bynajmniej możliwości *zrealizowania* go, t. j. możności efektywnego określenia mnogości N, zawierającej po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z, należących do pewnej mnogości M. Podamy niżej kilka przykładów, które nam wyjaśnią jeszcze bliżej różnicę pomiędzy pewnikiem Zermelo a zagadnieniem wyboru.

§ **48.** 1) Podzielmy wszystkie liczby rzeczywiste na zbiory, zaliczając dwie liczby rzeczywiste do tego samego zbioru, jeżeli różnica ich jest wymierna, oraz do różnych zbiorów, jeżeli różnica ich jest niewymierna. W ten sposób otrzymamy mnogość M zbiorów Z, taką, iż 1°: każda liczba rzeczywista należy do jednego i tylko jednego ze zbiorów Z; 2°: różnica dwuch liczb, należących do tego samego zbioru Z jest wymierna; 3°: różnica dwuch liczb, należących do różnych zbiorów Z, tworzących mnogość M, jest zawsze niewymierna. W myśl pewnika Zermelo istnieje mnogość N, zawierająca po jednej i tylko jednej liczbie z każdego zbioru Z, należącego do mnogości M: nie potrafimy jednak takiej mnogości N wyznaczyć: nie umiemy więc wybrać po jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z, pomimo, że każdy taki zbiór jest, jak łatwo widzieć, przeliczalny.

2) Weźmy pod rozwagę wszystkie funkcje zmiennej rzeczywistej $f(x)$, określone dla przedziału $0 \leq x \leq 1$, nie będące stale równemi zeru w tym przedziale. Podzielmy takie funkcje na pary, zaliczając do jednej pary dwie funkcje, różniące się tylko znakiem: oznaczmy przez M mnogość takich par. W myśl pewnika Zermelo istnieje mnogość N, zawierająca po jednej i tylko jednej funkcji z każdej pary, należącej do M: nie potrafimy jednak mnogości takiej wyznaczyć. Nie potrafimy więc wybrać po jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z (tworzących pewną mnogość M zbiorów), jakkolwiek każdy z tych zbiorów zawiera tylko dwa elementy.

3) Podzielmy na klasy wszystkie ciągi nieskończone wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej, zbieżne dla $0 \leq x \leq 1$, zaliczając do tej samej klasy wszystkie ciągi zbieżne do tej samej funkcji granicznej. Wyznaczenie w tym przypadku mnogości N, zawierającej po jednym i tylko jednym ciągu z każdej z tych klas jest rzeczą trudną, atoli możliwą [1]).

[1]) Zagadnienie nie stałoby się łatwiejszem, gdybyśmy się ograniczyli do ciągów wielomianów o współczynnikach wymiernych. Natomiast byłoby ono znacznie łatwiejszem, gdybyśmy rozważali tylko ciągi jednostajnie zbieżne wielomianów.

Jeżeli natomiast podzielilibyśmy na klasy wszystkie ciągi zbieżne liczb rzeczywistych, zaliczając do jednej klasy ciągi, zmierzające do tej samej granicy, wyznaczenie mnogości *N*, zawierającej po jednym ciągu z każdej takiej klasy, nie przedstawiałoby żadnej trudności.

4) Podzielmy na klasy wszystkie ciągi podwójne wielomianów, zbieżne w przedziale (0,1), zaliczając do tej samej klasy wszystkie ciągi zmierzające do tej samej funkcji granicznej. Bez pomocy pewnika Zermelo nie potrafimy dowieść istnienia zbioru, zawierającego po jednym i tylko jednym ciągu podwójnym z każdej klasy [1]).

5) Podzielmy wszystkie ciągi nieskończone liczb rzeczywistych na klasy, tak, iżby każda z nich zawierała wszystkie ciągi, różniące się tylko porządkiem wyrazów. Nie potrafimy wyznaczyć mnogości, zawierającej po jednym i tylko jednym ciągu z każdej takiej klasy. Potrafimy natomiast dać rozwiązanie efektywne analogicznego zagadnienia dla ciągów o wyrazach wymiernych.

Przykłady powyższe wystarczą chyba, aby przedstawić w należytem świetle różnicę między przyjęciem pewnika Zermelo, a jego realizacją.

§ **49.** Możnaby też, w stosunku do pewnika Zermelo, robić różnicę między przypadkiem, w którym *M* jest przeliczalną mnogością zbiorów *Z*, a przypadkiem, w którym *M* jest nieprzeliczalną mnogością zbiorów *Z*. Np. E. Borel sądzi, że należy zasadniczo odróżniać prawność przeliczalnej mnogości wyborów kolejnych i dowolnych (która, zresztą, wydaje mu się dość wątpliwą) od prawności nieprzeliczalnej mnogości wyborów (kolejnych lub jednoczesnych). „To ostatnie pojęcie wydaje mi się — pisze on [2]) — całkowicie pozbawionem sensu. Gdy chodzi o nieskończoność przeliczalną wyborów, nie mogą one oczywiście być wykonane wszystkie, lecz można przynajmniej wskazać postępowanie takie, że jeżeli ustalimy je naprzód, to będzie można mieć pewność, że każdy z tych wyborów zostanie wykonany w skończonym przeciągu czasu; jeżeli więc dwa dane układy wyborów są różne, jest pewność, że się to zauważy po skończonej ilości działań. Skoro nieskończona ilość wyborów nie jest przeliczalną, niepodobna przedstawić sobie sposobu jej określenia, t. j. odróżnienia jej od ana-

[1]) Gdybyśmy potrafili zbiór taki wyznaczyć, umielibyśmy podać przykład efektywny funkcji niemierzalnej w znaczeniu Lebesgue'a.

[2]) E. Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paryż 1914, str. 161. (Krytyka ta dotyczy zresztą tylko możności wyborów (à priori) a nie samego pewnika Zermelo).

logicznej nieskończonej ilości wyborów: niepodobna więc uważać ją za twór matematyczny, który może być wprowadzony do rozumowań".

Natomiast Lebesgue pisze [1]): „Zgadzam się zupełnie z p. Hadamard'em, gdy ten oznajmia, że trudność, gdy jest mowa o nieskończonej ilości wyborów, bez podania ich prawa, jest równie wielka, czy chodzi o nieskończoność przeliczalną, czy też nie".

Prof. Łuzin proponuje charakteryzować każdy przypadek stosowania pewnika Zermelo zapomocą dwuch liczb kardynalnych (m, r), z których pierwsza oznacza moc mnogości M, zaś druga — najmniejszą liczbę kardynalną, nie mniejszą od mocy każdego ze zbiorów Z, tworzących M. W ten sposób przypadek, odpowiadający przykładowi 1) z § 48, byłby charakteryzowany przez liczby $(2^{\aleph_0}, \aleph_0)$, odpowiadający przykładowi 2) — przez liczby $(2^{2^{\aleph_0}}, 2)$, przykładom 3), 4), 5)— przez liczby $(2^{\aleph_0}, 2^{\aleph_0})$. Zauważymy, że Łuzin w następujący sposób zapatruje się na znaczenie pewnika Zermelo: „Dla mnie dowód jakiegoś twierdzenia zapomocą pewnika Zermelo posiada wartość jedynie jako wskazanie na to, że bezcelowem jest tracenie czasu na ścisły dowód fałszywości uważanego twierdzenia".

Zauważymy jeszcze, że pewnik Zermelo posiada też wartość, jako narzędzie heurystyczne: pozwala on wykrywać twierdzenia (lub konstruować przykłady nie efektywne), dla których dowodów możemy szukać następnie na innej drodze. Każdy dowód zapomocą pewnika Zermelo przedstawia zarazem pewien niezbity fakt matematyczny, mianowicie fakt, że z takich a takich założeń (z założenia prawdziwości pewnika Zermelo w pewnym szczególnym przypadku) wynikają takie a takie wnioski. Niema chyba potrzeby dowodzenia, że już same przez się fakty tego rodzaju nie są dla współczesnej matematyki bez wartości. W każdym razie, jak to już zaznaczyliśmy wyżej, jest rzeczą wielce pożądaną rozróżnianie twierdzeń, które mogą być dowiedzione bez pomocy pewnika Zermelo, od twierdzeń, których nie potrafimy dowieść bez pomocy tego pewnika, na co się godzą nawet jego przeciwnicy [2]).

---

[1]) Tamże, str. 156.

[2]) H. Lebesgue pisze w *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2 ser. t. 46 (1922): „Powiedziałem na innem miejscu (*Fundamenta Mathematicae* t. II, str. 259), że nie rozumiem tych kwestji zupełnie tak, jak p. Sierpiński, lecz jestem z nim w zupełnej zgodzie co do faktu, że należy przywiązywać całkiem inną wagę do przykładów, które nie używają pewnika Zermelo, niż do tych, które go używają".

Przy badaniu dowodów, opartych na pewniku Zermelo, możemy 1) stwierdzać, że rozpatrywany dowód posługuje się pewnym szczególnym przypadkiem pewnika Zermelo (wskazując miejsce w dowodzie, gdzie ten przypadek jest użyty), albo nawet stwierdzać, że wszystkie znane dowody uważanego twierdzenia odwołują się do pewnika Zermelo; 2) wyznaczać szczególny przypadek pewnika Zermelo, wystarczający dla dowodu uważanego twierdzenia, oraz przypadek, konieczny dla dowodu. (Powiedzieć, że dany przypadek szczególny pewnika Zermelo jest konieczny dla dowodu danego twierdzenia, jest to utrzymywać, że z danego twierdzenia wynika prawdziwość uważanego przypadku szczególnego pewnika Zermelo); 3) wyznaczać przypadek szczególny pewnika Zermelo, który jest zarazem konieczny i wystarczający dla dowodu danego twierdzenia. (Zagadnienie to jest zresztą bardzo trudne i potrafimy je rozwiązać tylko w nielicznych przypadkach).

Zauważymy jeszcze, że udział pewnika Zermelo w dowodach istnienia zbiorów, funkcji i t. p., spełniających dane warunki, może być rozmaity. Pewnik Zermelo może być potrzebny już dla samej konstrukcji zbioru, lub funkcji, dającej żądany przykład; może się też zdarzyć, że zbiór ten (lub funkcja) jest zbudowany bez pomocy pewnika Zermelo, lecz jedynie dowód, że posiada on żądane własności, odwołuje się do tego pewnika. Odnośne przykłady poznamy później.

§ **50.** Przejdziemy obecnie do zastosowań pewnika Zermelo w teorji liczb kardynalnych.

Niech M oznacza mnogość mocy $\mathfrak{m}$, której elementami są zbiory nie próżne, nie mające elementów wspólnych.

Już w roku 1902, a więc na parę lat przed wygłoszeniem przez Zermelę swego pewnika, zwrócił uwągę Beppo Levi[1]), że w przypadku ogólnym nie potrafimy dowieść, że suma S zbiorów, tworzących mnogość M, będzie mocy nie mniejszej od mocy mnogości M, i że dowód można przeprowadzić we wszystkich tych przypadkach, w których potrafimy w każdym ze zbiorów, tworzących M, wyróżnić jeden element.

W myśl pewnika Zermelo, istnieje mnogość N, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów, należących do mnogości M. Będziemy mieli oczywiście $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{M}}$, zatem $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{m}$. Z drugiej strony, mnogość N jest oczywiście częścią mnogości S, i przeto (§ 42) mamy $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{N}}$, czyli $\overline{\overline{S}} \geqslant \mathfrak{m}$, c. b. d. o. Udowodnione twierdzenie możemy, jak łatwo widzieć, wyrazić jeszcze w następujący sposób:

[1]) *Rendiconti del R. Ist. Lomb. di sc. e lett.* Serie II Vol. 35 (1902).

Jeżeli jakąkolwiek mnogość rozbijemy na części rozłączne, to mnogość wszystkich tych części jest mocy nie większej od mocy rozbijanej mnogości.

Zauważymy, że bez pomocy pewnika Zermelo nie potrafimy udowodnić nawet, że przy rozbijaniu mnogości na części rozłączne, mnogość tych części nie może być mocy większej od rozbijanej mnogości, jakkolwiek nieprawdopodobnem może się to wydawać.

Jako zastosowanie naszego twierdzenia weźmy pod rozwagę mnogość S wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazy są różnemi liczbami rzeczywistemi. Mnogość S jest oczywiście częścią mnogości wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych, która, jak dowiedliśmy w § 33, ma moc $\mathfrak{c}$. Jest więc $\overline{\overline{S}} \leqslant \mathfrak{c}$. Podzielmy teraz wszystkie ciągi nieskończone, tworzące mnogość S, na klasy, zaliczając do tej samej klasy dwa ciągi wtedy i tylko wtedy, jeżeli się różnią tylko porządkiem wyrazów: oznaczmy przez M mnogość otrzymanych w ten sposób klas. W myśl naszego twierdzenia, będzie $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{S}}$, zatem $\overline{\overline{M}} \leqslant \mathfrak{c}$. Z drugiej strony łatwo widzieć, że musi być $\overline{\overline{M}} \geqslant \mathfrak{c}$. W samej rzeczy, mnogość P wszystkich ciągów nieskończonych rosnących o wyrazach naturalnych jest, jak wiemy (§ 41) mocy $\mathfrak{c}$, każdemu zaś takiemu ciągowi odpowiada pewna klasa ciągów (różniących się od niego conajwyżej porządkiem wyrazów), należąca do M, przytem różnym ciągom — różne klasy. Mnogość M jest więc mocy $\geqslant$ od mocy mnogości P, skąd, wobec $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{c}$, wnosimy, że $\overline{\overline{M}} \geqslant \mathfrak{c}$, a że wyżej znaleźliśmy $\overline{\overline{M}} \leqslant \mathfrak{c}$, więc mamy $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{c}$.

Lecz każda klasa, należąca do M, wyznacza oczywiście pewien zbiór przeliczalny (różnych) liczb rzeczywistych i naodwrót, każdy taki zbiór wyznacza pewną klasę, należącą do M (mianowicie klasę tych ciągów, dla której zbiorem wyrazów jest uważany zbiór przeliczalny). Mnogość M jest więc równej mocy z mnogością wszystkich zbiorów przeliczalnych, utworzonych z różnych liczb rzeczywistych, czyli z mnogością wszystkich części przeliczalnych zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Ta ostatnia mnogość jest więc mocy continuum.

Udowodniliśmy zatem (zapomocą pewnika Zermelo), że *mnogość wszystkich części przeliczalnych continuum jest mocy continuum.* Zauważymy jednak, że nie potrafimy dowieść, że mnogość wszystkich części przeliczalnych zbioru Z wszystkich liczb rzeczywistych jest efektywnie mocy continuum (t. j. efektywnie równej mocy ze zbiorem Z).

Zauważymy, że natomiast twierdzenie, iż *mnogość wszystkich części skończonych continuum jest mocy continuum,* potrafimy udowodnić bez odwoływania się do pewnika Zermelo. Jeżeli bowiem podzie-

limy na klasy wszystkie ciągi skończone, których wyrazami są różne liczby rzeczywiste, zaliczając do tej samej klasy dwa ciągi wtedy i tylko wtedy, jeżeli się różnią tylko porządkiem wyrazów, to potrafimy ustalić prawo, w myśl którego każdej takiej klasie będzie przyporządkowany oznaczony ciąg do niej należący: wystarczy np. zauważyć, że w każdej klasie będzie jeden i tylko jeden ciąg rosnący.

Jako drugie ważne zastosowanie naszego twierdzenia, wskażemy na twierdzenie, że *każda mnogość punktowa jest mocy nie mniejszej od mnogości punktów jej rzutu.*

Dla sprowadzenia tego twierdzenia do naszego twierdzenia, wystarczy daną mnogość punktową rozbić na części, łącząc w jedną część wszystkie te punkty uważanej mnogości, których rzuty się zlewają. Jako zastosowanie tego twierdzenia, udowodnimy, że *jeżeli continuum rozbijemy na dwie części, conajmniej jedna z nich jest mocy continuum.*

Niech P oznacza zbiór wszystkich punktów płaszczyzny: jak wiemy (§ 31) zbiór P jest mocy continuum. Wystarczy więc dalej, jak łatwo widzieć, udowodnić, że nie istnieje żaden rozkład $P = A + B$, gdzie A i B są zbiory mocy mniejszych od continuum. Załóżmy, przeciwnie, że rozkład taki istnieje. Rzut mnogości A na oś odciętych ma, w myśl naszego twierdzenia, moc $\leqslant$ od mocy zbioru A, zatem moc mniejszą od continuum. Rzut ten nie wypełnia więc całej osi odciętych. Istnieje więc odcięta x_0 taka, że prosta $x = x_0$ nie zawiera żadnego punktu mnogości A. Podobnież wnosimy, że istnieje rzędna y_0 taka, że prosta $y = y_0$ nie zawiera żadnego punktu mnogości B. Punkt (x_0, y_0) nie mógłby więc należeć ani do A, ani do B, wbrew $P = A + B$. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Zauważymy, że dla dowodu (przy pomocy pewnika Zermelo) niemożliwości rozkładu $P = A + B$, gdzie $\overline{\overline{A}} < \mathfrak{c}$ i $\overline{\overline{B}} < \mathfrak{c}$, możnaby też rozumować jak następuje.

Jeżeli istnieje prosta $x = a$, której wszystkie punkty należą do A, zbiór A ma oczywiście moc continuum; jeżeli taka prosta nie istnieje, to każda prosta $x = a$ zawiera conajmniej jeden punkt zbioru B: wybierając z każdej takiej prostej jeden punkt zbioru B, otrzymamy część zbioru B mocy continuum, skąd wnosimy z łatwością, że $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{c}$.

§ **51.** Zastosujemy obecnie pewnik Zermelo do dowodu twierdzenia, że *każda mnogość nie pusta, która nie jest skończoną, zawiera część przeliczalną*. Będzie stąd, jak wiemy, wynikało, że każda

mnogość nie pusta, która nie jest skończoną, jest nieskończoną w znaczeniu Dedekinda (§ 24).

Udowodnimy w tym celu przedewszystkiem (bez pomocy pewnika Zermelo), że *jeżeli mnogość nie pusta M nie jest skończoną, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje ciąg, złożony z n różnych elementów mnogości M.*

Skoro mnogość M nie jest pusta, więc istnieje przedmiot p, będący elementem mnogości M: twierdzenie nasze jest więc prawdziwe dla $n=1$. Załóżmy, że jest ono prawdziwe przy pewnem naturalnem n: istnieje więc ciąg $p_1, p_2, \ldots, p_n$, którego wyrazy są różnymi elementami mnogości M. Gdyby, prócz wyrazów wypisanego ciągu, mnogość M nie zawierała więcej żadnego elementu, to mnogość M byłaby skończoną (złożoną z n elementów), wbrew założeniu. Istnieje więc przedmiot q, różny od każdego z wyrazów naszego ciągu i będący elementem mnogości M. Ciąg $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ będzie więc złożony z $n+1$ wyrazów, które są różnymi elementami mnogości M. Prawdziwość naszego twierdzenia dla liczby n pociąga więc za sobą jego prawdziwość dla liczby $n+1$. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości naszego twierdzenia przy wszelkiem naturalnem n, c. b. d. o.

Niech teraz M oznacza mnogość, która nie jest pustą ani skończoną. W myśl dowiedzionego przed chwilą twierdzenia, istnieje więc dla każdej liczby naturalnej n conajmniej jeden ciąg, złożony z n wyrazów, będących różnymi elementami mnogości M. W myśl pewnika Zermelo wnosimy stąd, że istnieje ciąg nieskończony ciągów

$$C_1, C_2, C_3, \ldots,$$

gdzie $C_n = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)})$ jest ciągiem, złożonym z n wyrazów, będących różnymi elementami mnogości M $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony

$$p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_3^{(3)}, p_1^{(4)}, \ldots, \qquad (1)$$

który otrzymamy, wypisując kolejno ciągi $C_1, C_2, C_3, \ldots$. Opuśćmy w ciągu (1) te wyrazy, które są równe któremukolwiek z poprzedzających je wyrazów. Otrzymamy w ten sposób nowy ciąg:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, \qquad (2)$$

złożony z samych różnych elementów mnogości M. Ciąg (2) nie może być skończonym, gdyż zawiera on oczywiście wszystkie wyrazy każdego z ciągów C_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ciąg C_n zaś zawiera n różnych

elementów (gdyby więc ciąg (2) zawierał tylko skończoną liczbę m wyrazów, to liczba m musiałaby przy wszelkiem naturalnem n spełniać nierówność $m \geqslant n$, co niemożliwe). Jest to więc ciąg nieskończony.

Dowiedliśmy więc (zapomocą pewnika Zermelo), że jeżeli mnogość M nie jest pustą ani skończoną, to istnieje ciąg nieskończony, złożony z samych różnych elementów mnogości M.

Zauważymy, że bez odwoływania się do pewnika Zermelo można udowodnić, że jeżeli mnogość M nie jest pustą ani skończoną, to zbiór wszystkich części zbioru wszystkich części mnogości M zawiera ciąg nieskończony (Russell). Aby ciąg taki otrzymać, wystarczy przez p_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) oznaczyć zbiór wszystkich tych części mnogości M, które składają się z n elementów.

§ **52.** Niech teraz $\mathfrak{n}$ oznacza jakąkolwiek liczbę kardynalną, która nie jest skończoną, i niech U oznacza mnogość mocy $\mathfrak{n}$. Mnogość U nie jest więc skończoną ani pustą i przeto, jak dowiedliśmy w § 51, zawiera część mocy $\aleph_0$. Jest więc

$$\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$$

dla każdej liczby kardynalnej, która nie jest skończoną. Dla liczby kardynalnej skończonej n mamy natomiast oczywiście nierówność

$$n < \aleph_0 :$$

każda więc liczba kardynalna daje się z liczbą $\aleph_0$ połączyć jednym z trzech znaków: $>$, $=$, $<$.

Jeżeli dla mnogości M zachodzi nierówność

$$\overline{\overline{M}} < \aleph_0,$$

to M jest mnogością skończoną. Jeżeli

$$\overline{\overline{M}} = \aleph_0,$$

to mnogość M jest przeliczalną. Jeżeli wreszcie

$$\overline{\overline{M}} > \aleph_0,$$

to mnogość M nie jest ani pustą, ani skończoną, ani przeliczalną. Każdą taką mnogość nazywamy *nieprzeliczalną*.

Każda mnogość nieprzeliczalna zawiera zatem część przeliczalną. Usuńmy z danej mnogości nieprzeliczalnej M przeliczalną mnogość P jej elementów i połóżmy

$$M - P = R:$$

mamy stąd $M = P + R$, skąd wnosimy, że mnogość R nie jest pustą ani skończoną (gdyż wówczas $P + R$, czyli M, byłoby mnogością przeliczalną): jest to więc mnogość nieskończona (§ 51). Lecz w § 25 dowiedliśmy, że moc mnogości nieskończonej nie ulega zmianie, jeżeli do niej dołączymy przeliczalną mnogość elementów: mnogości R oraz $P + R$, czyli innemi słowy, mnogości $M - P$ oraz M, są więc równej mocy. Dowiedliśmy zatem, że *moc mnogości nieprzeliczalnej nie ulega zmianie, jeżeli z niej usunąć przeliczalną mnogość elementów*. Zauważymy, że twierdzenia tego nie potrafimy dowieść bez pewnika Zermelo.

§ **53.** Udowodnimy teraz przy pomocy pewnika Zermelo następujące

Twierdzenie: *Jeżeli*

$$M_1, M_2, M_3, \ldots \quad (1)$$

oraz

$$N_1, N_2, N_3, \ldots$$

są dwa ciągi nieskończone zbiorów, takie, że żadne dwa zbiory, należące do tego samego ciągu, nie posiadają elementów wspólnych, oraz

$$M_n \sim N_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad (2)$$

to, kładąc

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots, \qquad T = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots, \quad (3)$$

będziemy mieli

$$S \sim T.$$

Dowód. Niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną. W myśl założeń naszego twierdzenia, mamy $M_n \sim N_n$: istnieje więc odpowiedniość doskonała między elementami zbiorów M_n i N_n. Oznaczmy przez Φ_n zbiór wszystkich odpowiedniości doskonałych między M_n i N_n: zbiór Φ_n nie jest więc pusty. Jasnem jest przytem, że dla $m \neq n$ zbiory Φ_m oraz Φ_n nie posiadają elementów wspólnych.

W myśl pewnika Zermelo istnieje więc dla ciągu nieskończonego zbiorów

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$$

ciąg nieskończony

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \quad (4)$$

taki, iż przy wszelkiem naturalnem n wyraz φ_n jest elementem zbioru Φ_n, innemi słowy, φ_n jest odpowiedniością doskonałą między M_n oraz N_n (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Niech teraz s oznacza jakikolwiek dany element zbioru S: wobec (3) i uwagi, że zbiory ciągu (1) nie posiadają elementów wspólnych, istnieje, i przytem jedna tylko, liczba naturalna n taka, iż s jest elementem zbioru M_n. Niech, dalej, t oznacza ten element zbioru N_n, który jest przyporządkowany elementowi s zbioru M_n w odpowiedniości doskonałej φ_n między M_n i N_n: przyporządkujmy elementowi s zbioru S element t zbioru T. W ten sposób, jak łatwo widzieć, otrzymamy odpowiedniość doskonałą między zbiorami S i T (wyznaczoną przez ciąg odpowiedniości (4)). Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Zauważymy, że empiryści nie widzą potrzeby uciekania się do pewnika Zermelo dla dowodu tego twierdzenia. Pochodzi to stąd, że empirysta tylko wówczas powie, że dla dwuch danych ciągów nieskończonych zbiorów zachodzą wzory (2), jeżeli dany jest ciąg nieskończony (4) odpowiedniości doskonałych między M_n oraz N_n.

Niech teraz

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots \tag{5}$$

oznacza dany ciąg nieskończony liczb kardynalnych. Z definicji liczb kardynalnych wynika, że dla każdego naturalnego n istnieje (conajmniej jedna) mnogość mocy $\mathfrak{m}_n$: w myśl pewnika Zermelo wnosimy stąd, dalej, z łatwością, że istnieje ciąg nieskończony mnogości

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, \tag{6}$$

taki iż

$$\overline{\overline{M}}_n = \mathfrak{m}_n, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\text{ [1]} \tag{7}$$

Możemy, dalej, przypuszczać, że mnogości (6) nie posiadają elementów wspólnych: gdyby bowiem było inaczej, wystarczyłoby zastąpić każdą mnogość M_n przez mnogość wszystkich układów (m, n), gdzie m oznacza jakikolwiek element mnogości M_n.

Połóżmy

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

oraz

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{s}. \tag{8}$$

Niech, dalej

$$M'_1, M'_2, M'_3, \ldots$$

[1]) Dla empirystów wniosek ten nie wymaga stosowania pewnika Zermelo, gdyż dla nich liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest dana tylko wtedy, jeżeli dany jest zbiór M mocy $\mathfrak{m}$.

oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony mnogości, nie posiadających elementów wspólnych, taki iż

$$M'_n = \mathfrak{m}_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Wobec (7) i (9) będziemy więc mieli

$$M'_n \sim M_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

i przeto, w myśl dowiedzionego na początku tego § twierdzenia, kładąc

$$S' = M'_1 + M'_2 + M'_3 + \ldots,$$

będziemy mieli

$$S' \sim S,$$

co, wobec (8), daje

$$\overline{\overline{S'}} = \mathfrak{s}.$$

Dowiedliśmy więc, że ciągowi liczb kardynalnych (5) odpowiada oznaczona w zupełności liczba kardynalna $\mathfrak{s}$, niezależna od poszczególnego obioru mnogości (6), nie posiadających elementów wspólnych i spełniających warunek (7). Liczbę $\mathfrak{s}$ nazywamy *sumą szeregu nieskończonego* $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots$, pisząc

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n = \mathfrak{s}.$$

Z niezależności sumy szeregu nieskończnego zbiorów od porządku oraz ugrupowania składników, wnosimy natychmiast o przemienności i łączności sumy szeregu nieskończonego liczb kardynalnych. Możemy więc powiedzieć:

Każdy szereg nieskończony liczb kardynalnych posiada oznaczoną w zupełności sumę, niezależną od porządku i ugrupowania składników.

Z definicji sumy szeregu nieskończonego liczb kardynalnych wynika natychmiast, że jeżeli $M_1, M_2, M_3, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym mnogości, nie mających elementów wspólnych, to, kładąc

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

będziemy mieli

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{M}}_1 + \overline{\overline{M}}_2 + \overline{\overline{M}}_3 + \ldots.$$

Możnaby też z łatwością dowieść, że jeżeli $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ jest danym ciągiem nieskończonym liczb kardynalnych, to każda mnogość S, taka iż

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots$$

daje się rozbić na szereg nieskończony mnogości rozłącznych

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

taki iż

$$\overline{M} = \mathfrak{m}_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(por. § 15). Z łatwością również można dowieść, że suma szeregu nieskończonego liczb kardynalnych jest niemniejszą od każdego składnika szeregu, oraz, że jeżeli mamy dwa szeregi nieskończone liczb kardynalnych $\Sigma\mathfrak{m}_n$ oraz $\Sigma\mathfrak{m}_n'$, takie iż

$$\mathfrak{m}_n \leqq \mathfrak{m}_n', \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

to

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots \leqq \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \mathfrak{m}_3' + \ldots$$

Łatwo też dowieść, że dla wszelkich liczb kardynalnych nierówność

$$\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots \tag{10}$$

pociąga za sobą nierówność

$$\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

Trudniej znacznie jest dowieść, że i odwrotnie, nierówności (11) pociągają za sobą zawsze nierówność (10) (a więc, co za tem idzie, że suma szeregu nieskończonego liczb kardynalnych jest najmniejszą liczbą kardynalną, nie mniejszą od każdej sumy cząstkowej szeregu); trudno jest dowieść już nawet, że nierówności (11) wykluczają nierówność $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots$ (Zob. § 106).

Z innych własności szeregów nieskończonych liczb kardynalnych, zauważymy wzory

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots) = \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}\mathfrak{m}_3 + \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathfrak{m}_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{m}_{k,l} = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{m}_{1,n} + \mathfrak{m}_{2,n-1} + \ldots + \mathfrak{m}_{n,1}),$$

których łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi. Szeregi nieskończone liczb kardynalnych zachowują się więc podobnie, jak szeregi bezwzględnie zbieżne liczb rzeczywistych.

§ **54.** Jako przykład szeregu nieskończonego liczb kardynalnych, weźmy pod rozwagę szereg

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots,$$

gdzie n_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ jest danym ciągiem nieskończonym liczb naturalnych. Oznaczmy przez M_1 zbiór pierwszych n_1 liczb naturalnych, przez M_2 — zbiór dalszych n_2 liczb naturalnych (t. j. liczb $n_1 + 1$, $n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2$), przez M_3 — zbiór jeszcze dalszych n_3 liczb naturalnych i t. d. Będziemy więc mieli

$$\overline{\overline{M_k}} = n_k\,, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{12}$$

zaś jeżeli położymy

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots, \tag{13}$$

to S będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przeto

$$\overline{\overline{S}} = \aleph_0\,. \tag{14}$$

Wobec (13), (14) i (12), oraz z uwagi, że wzór (13) daje rozkład zbioru S na składniki rozłączne, znajdujemy (§ 53):

$$\aleph_0 = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots. \tag{15}$$

Wzór (15) dowodzi zarazem, że *suma szeregu nieskończonego mnogości skończonych jest mnogością przeliczalną.*

W myśl (15) mamy np.

$$\aleph_0 = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

lecz jednocześnie

$$\aleph_0 = 2 + 2 + 2 + \ldots,$$

jakoteż

$$\aleph_0 = 1 + 2 + 3 + \ldots = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$$

Wzory te dowodzą, że jeżeli mamy dwa szeregi nieskończone liczb kardynalnych, takie iż każdy składnik pierwszego szeregu jest mniejszy od odpowiedniego składnika drugiego szeregu, to suma pierwszego szeregu niekoniecznie jest mniejszą od sumy drugiego szeregu.

Weźmy teraz pod rozwagę szereg nieskończony liczb kardynalnych, którego wszystkie składniki są równe tej samej liczbie kardynalnej $\mathfrak{m}$. Niech M oznacza mnogość mocy $\mathfrak{m}$. Oznaczmy, przy każdem danem naturalnem n, przez M_n mnogość wszystkich układów (m, n), gdzie m oznacza jakikolwiek element mnogości M: będzie oczywiście

$$\overline{\overline{M_n}} = \mathfrak{m}\,, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

kładąc

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots. \tag{16}$$

będziemy więc mieli (wobec rozłączności składników sumy S):

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \ldots. \tag{17}$$

Lecz, z drugiej strony, wobec (16), S jest oczywiście zbiorem wszystkich układów (m, n), gdzie m oznacza jakikolwiek element mnogości M, zaś n — jakikolwiek element mnogości N wszystkich liczb naturalnych. Stąd, w myśl definicji iloczynu liczb kardynalnych (§ 16) oraz wobec $\overline{M} = \mathfrak{m}$, $\overline{N} = \aleph_0$, wnosimy, że

$$\overline{S} = \mathfrak{m} . \aleph_0 . \tag{18}$$

Wobec (17) i (18) mamy więc wzór:

$$\mathfrak{m} . \aleph_0 = \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \ldots \tag{19}$$

dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$.

W szczególności, dla $\mathfrak{m} = \aleph_0$, wzór (19) daje, wobec $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ (§ 22):

$$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots . \tag{20}$$

Wzór (20) dowodzi zarazem, że *suma przeliczalnej mnogości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.*

Zauważymy, że ze stanowiska empirystów niema potrzeby odwoływania się do pewnika Zermelo przy dowodzie tego twierdzenia. Oto co pisze np. Lebesgue w tej sprawie: [1]) „Prawda, że napozór robi się niekiedy wybory bez podania prawa. Lecz jest to, albo dlatego, ze jest rzeczą małej wagi, czy się zrobi taki wybór, czy inny, byleby się zrobiło jakiś, i ponieważ jest oczywistem, iż możnaby określić logicznie pewien wybór „zapomocą skończonej liczby wyrazów"; albo też dlatego, że wybór jest narzucony. Przypuśćmy, naprzykład, że chodzi o dowód, iż suma nieskończoności przeliczalnej zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Niech $a_1^1, a_1^2, \ldots$ będzie pierwszy zbiór E_1, niech $a_2^1, a_2^2, \ldots$ będzie drugi $E_2, \ldots$ Można ustawić wszystkie elementy w ciąg przeliczalny:

$$a_1^1,\ a_1^2,\ a_2^1,\ a_1^3,\ a_2^2,\ a_3^1,\ \ldots$$

Lecz, zarzucą nam, „przeliczyliście" E_1 w pewien sposób szczególny i jest w tem wybór, któryście zrobili bez podania prawa. A ponieważ postąpiliście w ten sposób z każdym zbiorem E_i, więc jest tu nieskończenie wiele wyborów, zrobionych bez podania prawa.

W żaden sposób. Dano mi zbiory $E_1, E_2, \ldots$ nie każdy z osobna, lecz zapomocą pewnego prawa. Z tego prawa winienem był wyprowadzić dowód, że każdy z nich jest przeliczalny, czego nie mógłbym zrobić zosobna dla każdego zbioru, lecz dzięki rozumowaniu,

---

[1]) *Fundamenta Mathematicae*, t. II (1921), str. 260.

które mi pozwoliło uskutecznić ustawienie elementów każdego zbioru E_i w oznaczony ciąg $a_i^1, a_i^2, \ldots$ Zatem ciągi te powinny być uważane jako dane; nie wynikają one z wyboru.

Odpowiedziałbym w ten sam sposób na uwagi, uczynione z powodu dowodu tej własności: suma nieskończoności przeliczalnej zbiorów mierzalnych jest mierzalna.

Wydaje mi się, że ci, którzy widzą w tych dowodach użycie pewnika Zermelo, przypisują ich wypowiedzeniom sens „idealistyczny", gdy ja tymczasem rozumiem je w znaczeniu „empirystycznem". Pokażę lepiej różnicę między temi interpretacjami, mówiąc, że nie rozumiem co się chce powiedzieć, gdy się mówi o zbiorze *przeliczalnym*, który nie jest *efektywnie przeliczalny*. Mamy tu do czynienia z dwiema umysłowościami; traciłoby się czas, usiłując dowieść, że jedna z nich jest dobrą, a druga nie. Badania, czynione zapomocą pewnika Zermelo, są ważne z innej strony: gdyby prace te doprowadziły do jakiegoś godnego uwagi odkrycia, sprawa pewnika byłaby blizką wygrania".

Ze stanowiska idealistów natomiast nie potrafimy udowodnić bez odwoływania się do pewnika Zermelo już nawet wzoru $2+2+2+\ldots=\aleph_0$, co B. Russell ilustruje następującym anegdotycznym przykładem [1]). Pewien miljoner posiadał $\aleph_0$ par butów. Czy można dowieść, że liczba butów, posiadana przez niego, jest parzystą? Owszem, gdyż można będzie zaliczyć do jednej klasy wszystkie buty z lewej nogi, do drugiej zaś wszystkie buty z prawej nogi. Lecz gdyby ów miljoner przez ekscentryczność posiadał jednakowe buty z każdej nogi, tak iż nie byłoby buta prawego i buta lewego w każdej parze, to byłoby rzeczą niemożliwą uskutecznić podział butów na dwie równe części. Byłoby więc niemożliwem okazanie, że liczba butów jest parzysta, albo że jest $\aleph_0$ butów, pomimo faktu, że mamy $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0$.

Powróćmy do wzoru (19). Kładąc w nim $\mathfrak{m}=\mathfrak{c}$, wobec $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$ (§ 30), otrzymujemy:

$$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\ldots$$

Wzór (21) dowodzi zarazem, że *suma przeliczalnej mnogości zbiorów mocy continuum jest zbiorem mocy continuum.*

§ **55.** Pojęcie sumy liczb kardynalnych było dotychczas określone tylko dla skończonej oraz dla przeliczalnej mnogości składników. Aby je uogólnić na dowolną mnogość liczb kardynalnych, należy się oprzeć na następującem twierdzeniu:

[1]) *Bull. de la Soc. Math. de France* 1911.

Jeżeli mamy dwa zbiory mnogości: zbiór Z, którego elementami są mnogości M, nie mające elementów wspólnych, oraz zbiór Z', którego elementami są mnogości M', również nie mające elementów wspólnych, i jeżeli między zbiorami Z i Z' istnieje odpowiedniość doskonała, w której każdej mnogości M zbioru Z odpowiada mnogość M' zbioru Z', będąca równej mocy z M, to suma S wszystkich mnogości M zbioru Z jest równej mocy z sumą S' wszystkich mnogości M' zbioru Z'.

Dowód tego twierdzenia otrzymujemy, modyfikując nieco dowód twierdzenia, udowodnionego na początku § 53. Opierając się na niem możnaby z łatwością okazać, że każdemu zbiorowi $\mathfrak{Z}$ liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ odpowiada oznaczona w zupełności liczba kardynalna $\mathfrak{s}$, taka, iż jeżeli Z jest jakimkolwiek zbiorem mnogości M, nie mających elementów wspólnych, dla których zbiorem odpowiednich liczb kardynalnych jest zbiór $\mathfrak{Z}$, to mocą sumy S wszystkich mnogości M zbioru Z jest liczba kardynalna $\mathfrak{s}$. Liczbę tę $\mathfrak{s}$ nazywamy sumą wszystkich liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, tworzących zbiór $\mathfrak{Z}$.

Zakładając, w szczególności, że $\mathfrak{Z}$ jest zbiorem mocy $\mathfrak{n}$ liczb kardynalnych, z których każda jest równa $\mathfrak{m}$, moglibyśmy, dalej, z łatwością udowodnić (podobnie jak w § 54 dla przypadku $\mathfrak{n} = \aleph_0$), że suma $\mathfrak{s}$ wszystkich liczb kardynalnych zbioru $\mathfrak{Z}$ wynosi $\mathfrak{m} . \mathfrak{n}$. Stąd, wobec prawa przemienności iloczynu dwuch liczb kardynalnych, możnaby z łatwością otrzymać twierdzenie:

Jeżeli mamy zbiór Z mocy $\mathfrak{n}$ mnogości rozłącznych, z których każda jest mocy $\mathfrak{m}$, oraz zbiór Z' mocy $\mathfrak{m}$ mnogości rozłącznych, z których każda jest mocy $\mathfrak{n}$, to suma wszystkich mnogości zbioru Z jest równej mocy z sumą wszystkich mnogości zbioru Z', przyczem każda z tych sum jest mocy $\mathfrak{mn}$.

W szczególności np. dla $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \mathfrak{c}$ wnosimy, wobec $\mathfrak{cc} = \mathfrak{c}$, że jeżeli Z jest zbiorem mocy continuum mnogości, z których każda jest mocy continuum, to suma wszystkich mnogości zbioru Z jest mocy continuum.

§ **56.** Niech

$$M_1, M_2, M_3, \ldots .$$

będzie dany ciąg nieskończony mnogości. Oznaczmy przez P mnogość wszystkich ciągów nieskończonych

$$m_1, m_2, m_3, \ldots , \tag{1}$$

takich, iż przy wszelkiem naturalnem k, m_k jest elementem mnogości M_k.

Niech, dalej,

$$N_1, N_2, N_3, \ldots$$

będzie jakikolwiek inny ciąg nieskończony mnogości, byleby taki, że

$$M_k \sim N_k, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

i oznaczmy przez Q mnogość wszystkich ciągów nieskończonych

$$n_1, n_2, n_3, \ldots, \tag{3}$$

takich, że, przy wszelkiem naturalnem k, n_k jest elementem mnogości N_k.

Udowodnimy, przy pomocy pewnika Zermelo, że

$$P \sim Q. \tag{4}$$

Zauważymy w tym celu przedewszystkiem, iż z założenia (2) wynika, w myśl pewnika Zermelo (jak tego dowiedliśmy szczegółowo w § 53), że istnieje ciąg nieskończony odpowiedniości doskonałych

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \tag{5}$$

gdzie φ_k oznacza odpowiedniość doskonałą między M_k i N_k (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$).

Przyporządkujmy teraz każdemu danemu ciągowi (1), należącemu do mnogości P, ciąg nieskończony (3), w którym, przy wszelkiem naturalnem k, n_k oznacza ten element mnogości N_k, który jest przyporządkowany elementowi m_k mnogości M_k w odpowiedniości φ_k. W ten sposób, jak łatwo widzieć, otrzymamy (wyznaczoną w zupełności przez ciąg odpowiedniości (5)) odpowiedniość doskonałą między wszystkimi ciągami, tworzącymi mnogość P z jednej oraz Q z drugiej strony, co dowodzi prawdziwości wzoru (4).

Niech teraz

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots \tag{6}$$

będzie danym ciągiem nieskończonym liczb kardynalnych: w myśl pewnika Zermelo wnosimy z łatwością, że istnieje ciąg nieskończony mnogości

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, \tag{7}$$

taki iż

$$\overline{\overline{M}}_k = \mathfrak{m}_k, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

Oznaczmy, jak wyżej, przez P mnogość wszystkich ciągów (1), odpowiadających ciągowi mnogości (7), i połóżmy

$$P = \mathfrak{p}. \tag{9}$$

Niech, dalej

$$N_1,\ N_2,\ N_3, \ldots . \tag{10}$$

oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony mnogości, taki iż

$$\overline{\overline{N}}_k = \mathfrak{m}_k, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

i oznaczmy, jak wyżej, przez Q mnogość wszystkich ciągów (3), odpowiadających ciągowi mnogości (10).

Wobec (8) i (11) będziemy mieli wzory (2), które, jak dowiedliśmy, pociągają za sobą wzór (4), skąd, wobec (9), wynika wzór:

$$\overline{\overline{Q}} = \mathfrak{p}.$$

Dowiedliśmy więc, że ciągowi liczb kardynalnych (6) odpowiada oznaczona w zupełności liczba kardynalna $\mathfrak{p}$, niezależna od poszczególnego obioru mnogości (7), spełniających warunek (8). Liczbę $\mathfrak{p}$ nazywamy *wartością iloczynu nieskończonego liczb kardynalnych* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$, pisząc:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots, \quad \text{lub} \quad \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_k = \mathfrak{p}.$$

Łatwo widzieć, że wartość iloczynu nieskończonego liczb kardynalnych nie zależy od porządku czynników, oraz że te ostatnie możemy dowolnie łączyć w grupy. Możemy więc powiedzieć:

Dla każdego iloczynu nieskończonego liczb kardynalnych istnieje oznaczona w zupełności liczba kardynalna, będąca jego wartością, przyczem wartość ta nie zależy od porządku i ugrupowania czynników.

Łatwo widzieć, że jeżeli w iloczynie nieskończonym liczb kardynalnych

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots .$$

mamy

$$\mathfrak{m}_k = 1, \quad \text{dla} \quad k = r+1,\ r+2,\ r+3, \ldots,$$

to wartością tego iloczynu nieskończonego jest iloczyn skończony

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r .$$

Ogólniej, łatwo widzieć, że w iloczynie nieskończonym liczb kardynalnych możemy zawsze opuścić czynniki równe jedności.

Weźmy teraz pod rozwagę iloczyn nieskończony, którego wszystkie czynniki są równe tej samej liczbie kardynalnej $\mathfrak{m}$. Niech M oznacza daną mnogość mocy $\mathfrak{m}$. Z definicji iloczynu nieskończonego liczb kardynalnych wynika, że jako wartość $\mathfrak{p}$ badanego iloczynu możemy uważać moc mnogości P wszystkich ciągów nieskończonych, których

wyrazami są elementy mnogości M. Lecz, w myśl definicji potęgi liczb kardynalnych (§ 18) mnogość P jest mocy $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$: wynika stąd wzór

$$\mathfrak{m}^{\aleph_0} = \mathfrak{m} \, . \, \mathfrak{m} \, . \, \mathfrak{m} \ldots \tag{12}$$

dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$. W szczególności, dla $\mathfrak{m} = 2$, wobec $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (§ 34), otrzymujemy:

$$\mathfrak{c} = 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \ldots . \tag{13}$$

Wzór ten dowodzi, że dla liczb kardynalnych nierówności

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

nie zawsze pociągają za sobą nierówność:

$$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots , \tag{15}$$

bo np. każdy iloczyn cząstkowy iloczynu (13) jest skończony, zatem $< \aleph_0$, gdy tymczasem wartość iloczynu (13) jest $> \aleph_0$.

Z drugiej strony, jak łatwo widzieć, nierówność (15) pociąga za sobą zawsze nierówność (14).

Przyjmując we wzorze (12) $\mathfrak{m} = \aleph_0$, względnie $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$, otrzymujemy, wobec wzorów $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (§§ 33, 35):

$$\mathfrak{c} = \aleph_0 \aleph_0 \aleph_0 \ldots \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} \ldots \tag{16}$$

Wzory te dowodzą, że jeżeli czynniki jednego iloczynu nieskończonego są stale mniejsze od odpowiednich czynników drugiego, to wartość pierwszego iloczynu może nie być mniejszą od wartości drugiego. Można jednak z łatwością udowodnić (opierając się na pewniku Zermelo), że jeżeli mamy dwa iloczyny nieskończone liczb kardynalnych

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots \quad \text{i} \quad \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3 \ldots , \tag{17}$$

takie iż

$$\mathfrak{m}_k \leqslant \mathfrak{n}_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots , \tag{18}$$

to

$$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots \leqslant \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3 \ldots$$

(Możemy bowiem, opierając się na pewniku Zermelo, wobec (18), zawsze tak obrać mnogości ciągów nieskończonych P_1 i P_2, odpowiające iloczynom nieskończonym (17), iżby mnogość P_1 była częścią mnogości P_2).

Jako zastosowanie tej nierówności obliczymy iloczyn wszystkich kolejnych liczb naturalnych. Wobec

$$2 \leqslant n < \aleph_0, \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, \ldots ,$$

znajdujemy:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \leqq 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \leqq \aleph_0 \aleph_0 \aleph_0 \ldots,$$

skąd, wobec (13) i (16), znajdujemy w jednej chwili:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots = \mathfrak{c}.$$

Z innych własności iloczynu nieskończonego liczb kardynalnych zauważymy wzory

$$(\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots)^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}_1^{\mathfrak{p}} \mathfrak{m}_2^{\mathfrak{p}} \mathfrak{m}_3^{\mathfrak{p}} \ldots,$$

oraz

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 + \cdots} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}_2} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}_3} \ldots,$$

których dowód pozostawiamy czytelnikowi.

§ **57.** Podobnie, jak pojęcie sumy, możemy pojęcie iloczynu uogólnić na dowolną mnogość liczb kardynalnych. Niech, mianowicie, $\mathfrak{Z}$ oznacza jakikolwiek dany zbiór liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, zaś Z — zbiór mnogości M, będący równej mocy ze zbiorem $\mathfrak{Z}$ i taki, że każdej mnogości M zbioru Z odpowiada liczba kardynalna $\mathfrak{m}$, należąca do zbioru Z, taka iż $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$. Oznaczmy, dalej, przez P mnogość wszystkich odwzorowań zbioru $\mathfrak{Z}$ na sumie mnogości M zbioru Z, takich, iż każdemu elementowi $\mathfrak{m}$ zbioru $\mathfrak{Z}$ odpowiada pewien element tej mnogości M zbioru Z, która jest przyporządkowana elementowi $\mathfrak{m}$ w odpowiedniości doskonałej między $\mathfrak{Z}$ i Z. Połóżmy $\mathfrak{p} = \overline{\overline{P}}$. Opierając się na pewniku Zermelo, możnaby z łatwością udowodnić (podobnie jak dla iloczynu przeliczalnej mnogości czynników), że liczba kardynalna $\mathfrak{p}$ zależy jedynie od zbioru liczb kardynalnych $\mathfrak{Z}$; liczbę $\mathfrak{p}$ nazywamy iloczynem wszystkich liczb kardynalnych, tworzących zbiór $\mathfrak{Z}$. Łatwo widzieć, że iloczyn taki obejmuje jako przypadki szczególne iloczyn skończony oraz iloczyn nieskończony (przeliczalny) liczb kardynalnych, jakoteż że posiada prawa przemienności, łączności i rozdzielności.

Łatwo też widzieć, że pewnik Zermelo jest równoważny twierdzeniu, że każda mnogość liczb kardynalnych posiada różny od zera iloczyn.

W szczególności, jeżeli $\mathfrak{Z}$ jest zbiorem mocy $\mathfrak{n}$ liczb kardynalnych, z których każda jest równa $\mathfrak{m}$, to, jak łatwo widzieć, iloczyn $\mathfrak{p}$ wszystkich liczb kardynalnych, tworzących zbiór $\mathfrak{Z}$, wynosi $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$: potęga liczb kardynalnych może więc być uważana jako przypadek iloczynu.

§ **58.** *Twierdzenie* J. König'a. *Jeżeli*

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots \quad (1)$$

oraz

$$\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3, \ldots \quad (2)$$

są dwa ciągi nieskończone liczb kardynalnych, takie iż

$$\mathfrak{m}_k < \mathfrak{n}_k, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

to mamy nierówność

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3 \ldots \tag{4}$$

Dowód. [1]) Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są spełnione. Z pewnika Zermelo wynika stąd z łatwością, że istnieją ciągi nieskończone mnogości

$$M_1, M_2, M_3, \ldots \tag{5}$$

oraz

$$N_1, N_2, N_3, \ldots, \tag{6}$$

takie, iż

$$\overline{\overline{M}}_k = \mathfrak{m}_k, \quad \overline{\overline{N}}_k = \mathfrak{n}_k, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

przyczem możemy zakładać, że mnogości (6) nie posiadają elementów wspólnych, oraz że przy wszelkiem naturalnem k mnogość M_k jest częścią mnogości N_k. (W myśl (3), istnieje bowiem dla każdego naturalnego k conajmniej jedna para mnogości M_k i N_k, taka, że M_k jest częścią mnogości N_k, oraz iż $\overline{\overline{M}}_k = \mathfrak{m}_k$, $\overline{\overline{N}}_k = \mathfrak{n}_k$, a stąd, przy pomocy pewnika Zermelo, wnosimy natychmiast o istnieniu ciągu nieskończonego takich par).

Połóżmy

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots \tag{8}$$

i oznaczmy przez P mnogość wszystkich ciągów nieskończonych

$$n_1, n_2, n_3, \ldots,$$

gdzie, przy wszelkiem naturalnem k, n_k jest elementem mnogości N_k.

Skoro mnogości (6), a więc, tembardziej, mnogości (5) (będące ich częściami) nie posiadają elementów wspólnych, więc wzór (8) daje, wobec (7):

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots,$$

zaś, z definicji mnogości P oraz w myśl (7), mamy

$$\overline{\overline{P}} = \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3 \ldots:$$

dla dowodu nierówności (4) wystarczy więc okazać, że

$$\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P}}. \tag{9}$$

[1]) Twierdzenie König'a jest też prawdziwe dla ciągów skończonych liczb kardynalnych: dla dowodu należałoby ledwo nieznacznie zmienić dowód poniższy (zastępując, gdzie należy, ciągi nieskończone skończonemi).

Połóżmy

$$R_k = N_k - M_k, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots.); \tag{10}$$

ponieważ przy wszelkiem naturalnem k mnogość M_k jest częścią mnogości N_k, zaś, wobec (7) i (3) nie może być $M_k = N_k$, więc M_k jest częścią właściwą mnogości N_k: wynika stąd, że mnogości (10) są wszystkie *nie puste*. Nadto, wobec założenia co do mnogości (6), mnogości R_k ($k = 1, 2, 3, \ldots.$) nie będą posiadały elementów wspólnych. W myśl pewnika Zermelo, dla ciągu nieskończonego mnogości

$$R_1, R_2, R_3, \ldots.$$

istnieje ciąg nieskończony

$$r_1, r_2, r_3, \ldots., \tag{11}$$

taki, że, przy wszelkiem naturalnem k, r_k jest elementem mnogości R_k: żaden z wyrazów ciągu (11) nie będzie przytem należał do mnogości (8).

Oznaczmy, dalej, ogólnie przy danem naturalnem k, przez T_k mnogość wszystkich ciągów nieskończonych, które otrzymujemy z ciągu (11), zastępując jego k-ty wyraz przez jakikolwiek element mnogości M_k. Będzie oczywiście

$$\overline{\overline{T}}_k = \overline{\overline{M}}_k, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots., \tag{12}$$

przyczem różnym wskaźnikom k będą odpowiadały mnogości T_k, nie posiadające elementów wspólnych. Połóżmy

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots.;$$

będzie więc, wobec (12) i (8) (z uwagi, że i mnogości (5) nie mają elementów wspólnych):

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{S}} \tag{13}$$

Lecz, z drugiej strony, mnogość T jest oczywiście częścią mnogości P: mamy więc

$$\overline{\overline{T}} \leqq \overline{\overline{P}},$$

skąd, wobec (13), znajdujemy:

$$\overline{\overline{S}} \leqq \overline{\overline{P}}.$$

Dla dowodu nierówności (9) wystarczy więc okazać, że nie może być $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{P}}$, czyli, że mnogość S i P nie mogą być równej mocy.

Załóżmy więc, że istnieje odpowiedniość doskonała między mnogościami S i P. Niech k oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Każdej mnogości M_k (będącej w myśl (8), częścią mnogości S) odpowiada więc pewna część $P_k \sim M_k$ mnogości P, przyczem oczywiście

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots. = P. \tag{14}$$

Weźmy pod rozwagę wszystkie te ciągi mnogości P, które należą do P_k i oznaczmy przez W_k zbiór wszystkich (różnych) k-tych wyrazów tych ciągów.

Podzielmy wszystkie ciągi, należące do P_k, na klasy ciągów, mających ten sam k-ty wyraz: mnogość tych klas będzie oczywiście tej samej mocy co W_k, skąd, w myśl twierdzenia z § 50 (którego dowód oparty jest na pewniku Zermelo[1])), wnosimy, że

$$\overline{\overline{W_k}} \leqslant \overline{\overline{P_k}},$$

co, wobec $P_k \sim M_k$ oraz w myśl (7) i (3), daje

$$\overline{\overline{W_k}} < \overline{\overline{N_k}}. \tag{15}$$

Lecz, z drugiej strony, mnogość W_k jest częścią mnogości N_k (gdyż k-tym wyrazem każdego ciągu, należącego do mnogości P, jest element mnogości N_k): nierówność (15) dowodzi więc, że W_k jest częścią właściwą mnogości N_k i przeto mnogość

$$N_k - W_k = U_k \tag{16}$$

nie jest pustą. Mnogości

$$U_1, U_2, U_3, \ldots,$$

jako części odpowiednich mnogości (6), nie posiadają przytem elementów wspólnych. W myśl pewnika Zermelo, istnieje więc ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, \tag{17}$$

taki, iż przy wszelkiem naturalnem k, u_k jest elementem mnogości U_k, zatem, wobec (16), u_k nie należy do mnogości W_k. Wnosimy stąd natychmiast, wobec definicji mnogości W_k, że ciąg (17) jest różny (w k-tym wyrazie) od każdego z ciągów, należących do mnogości P_k. Wobec (14), ciąg (17) byłby więc różny od każdego ciągu, należącego do mnogości P, co niemożliwe, gdyż (z uwagi, że $U_k \subset N_k$) ciąg (17) należy do P. Dowiedliśmy więc, że mnogości S i P nie mogą być równej mocy.

Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

---

[1]) W tem miejscu dowodu pewnik Zermelo będzie wchodził nawet w przypadku twierdzenia K ö n i g a dla skończonego ciągu liczb kardynalnych, np. w dowodzie twierdzenia, że z nierówności $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{n}_1$ oraz $\mathfrak{m}_2 < \mathfrak{n}_2$ wynika nierówność $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 < \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2$.

Zauważymy, że, zmieniając nieznacznie powyższy dowód twierdzenia K ö n i g a, moglibyśmy udowodnić

T w i e r d z e n i e: Jeżeli dwa ciągi nieskończone liczb kardynalnych pozaskończonych svełniają nierówności

$$\mathfrak{m}_k \leqslant \mathfrak{n}_k, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

to mamy

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3 \ldots$$

W samej rzeczy, dla dowodu tego twierdzenia wystarczy, zachowując znakowanie, użyte przy dowodzie twierdzenia Königa, okazać, że $\overline{\overline{S}} \leqslant \overline{\overline{P}}$. Lecz, przeglądając dowód tw. Königa, widzimy z łatwością, że dla dowodu nierówności $\overline{\overline{S}} \leqslant \overline{\overline{P}}$ nie jest konieczną nierówność (3): wystarczy tylko założyć, że mnogości M_k są częściami właściwemi odpowiednich mnogości N_k, co możemy przypuścić zawsze, w przypadku $\overline{\overline{M}}_k \leqslant \overline{\overline{N}}_k$ (gdyż każda mnogość nieskończona jest równej mocy z pewną swą częścią właściwą).

W szczególności, wnosimy z naszego twierdzenia, że *suma szeregu nieskończonego liczb kardynalnych pozaskończonych jest zawsze niewiększą od ich iloczynu.* (Dla liczb skończonych twierdzenie to nie zawsze jest prawdziwe, bo mamy np. $1 + 1 + 1 + \ldots > 1 . 1 . 1 \ldots$).

Ciekawy przypadek szczególny twierdzenia K ö n i g a otrzymamy zakładając, że

$$\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$$

jest ciągiem rosnącym liczb kardynalnych, i kładąc

$$\mathfrak{n}_k = \mathfrak{m}_{k+1}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots;$$

będziemy tu mieli nierówności (3) i, w myśl tw. K ö n i g a, otrzymamy:

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 \ldots$$

skąd, tembardziej

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \ldots$$

Zatem: *suma szeregu nieskończonego liczb kardynalnych rosnących jest zawsze mniejszą od ich iloczynu.*

Jako inne zastosowanie twierdzenia K ö n i g a udowodnimy, że *jeżeli continuum rozbijemy na przeliczalną mnogość zbiorów, to conajmniej jeden z tych zbiorów będzie mocy continuum.* Innemi słowy, jeżeli

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots, \tag{18}$$

to conajmniej jeden ze składników prawej strony jest równy $\mathfrak{c}$.

Załóżmy więc, że zachodzi wzór (18): każda z liczb kardynalnych $\mathfrak{m}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) jest więc $\leq \mathfrak{c}$. Gdyby wszystkie one były $< \mathfrak{c}$, czyli, gdybyśmy mieli

$$\mathfrak{m}_k < \mathfrak{c}, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

to, w myśl tw. K ö n i g a (dla $\mathfrak{n}_k = \mathfrak{c}$, $k = 1, 2, \ldots$) byłoby

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} \ldots,$$

czyli, wobec $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} \ldots = \mathfrak{c}$ (§ 56, wzór (16)):

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < \mathfrak{c},$$

wbrew (18). Musi więc conajmniej jeden ze składników $\mathfrak{m}_k$ być równy $\mathfrak{c}$, c. b. d. o.

Gdybyśmy, w szczególności, założyli, że wszystkie składniki prawej strony wzoru (18) są równe, to otrzymalibyśmy z naszego twierdzenia wniosek, że równość

$$\mathfrak{m} . \aleph_0 = \mathfrak{c}$$

pociąga za sobą równość

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{c},$$

innemi słowy, że jeżeli continuum rozbijemy na przeliczalną mnogość zbiorów równej mocy, to każdy z nich jest mocy continuum. Mamy tu więc twierdzenie, dotyczące niejako *dzielenia* liczb kardynalnych, które możnaby wyrazić wzorem $\mathfrak{c} : \aleph_0 = \mathfrak{c}$. (Z innych podobnych wzorów zauważymy np. wzór $\aleph_0 : 2 = \aleph_0$; wogóle jednak nie każde dwie liczby kardynalne dają oznaczony iloraz, t. j. nie dla każdych liczb kardynalnych $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{m}$ istnieje oznaczona liczba $\mathfrak{n}$, spełniająca równanie $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$: np. iloraz $\aleph_0 : \aleph_0$ nie jest oznaczony, gdyż $\aleph_0 . 1 = \aleph_0$, jakoteż $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$).

Załóżmy teraz, że liczba $\mathfrak{c}$ jest sumą skończonej liczby liczb kardynalnych

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_n;$$

wobec $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} + 1 + 1 + 1 + \ldots$, możemy więc też napisać

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_n + 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

skąd, jak dowiedliśmy wyżej, wynika, że conajmniej jeden ze składników prawej strony jest równy $\mathfrak{c}$, zatem (wobec $\mathfrak{c} > 1$), że conajmniej jedna z liczb $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ jest równa $\mathfrak{c}$. Dowiedliśmy więc, że *jeżeli continuum rozbijemy na skończoną liczbę części, to conaj-*

mniej jedna z nich musi być mocy continuum. Twierdzenie to udowodniliśmy już w § 50 na innej drodze.

Powracając do samego twierdzenia Königa, zauważymy jeszcze, że zmieniając nieco podany przez nas dowód, możnaby udowodnić znacznie ogólniejsze

Twierdzenie Zermelo[1]): *Jeżeli mamy dwa zbiory liczb kardynalnych Z i Z', równej mocy i takie, że każdej liczbie kardynalnej zbioru Z odpowiada większa od niej liczba kardynalna zbioru Z', to suma wszystkich liczb kardynalnych zbioru Z jest mniejsza od iloczynu wszystkich liczb kardynalnych zbioru Z'.*

Wiele nierówności ogólnych dla liczb kardynalnych są tylko przypadkami szczególnymi tego twierdzenia. Np., zakładając, że zbiory Z i Z' są mocy $\mathfrak{m}$ oraz że każdy element zbioru Z jest równy liczbie kardynalnej 1, zaś każdy element zbioru Z' — liczbie kardynalnej 2, otrzymujemy z tw. Zermeli w jednej chwili nierówność

$$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$$

dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, udowodnioną w § 37 na innej drodze.

§ **59.** Udowodnimy teraz przy pomocy pewnika Zermelo następujące

Twierdzenie:[2]) *Dla każdego zbioru Z mnogości nie pustych M* (mogących posiadać elementy wspólne) *istnieje przyporządkowanie, według którego każdej mnogości M, należącej do zbioru Z, odpowiada pewien jej element m.*

Dowód. Niech Z oznacza dany zbiór, którego elementami są mnogości nie puste M. Dla każdej danej mnogości M, należącej do zbioru Z, oznaczmy przez M^* mnogość wszystkich układów (M, m), gdzie m oznacza jakikolwiek element mnogości M. (Będzie oczywiście $\overline{M^*} = \overline{M}$). Niech, dalej, T oznacza zbiór wszystkich mnogości M^*, gdzie M jest jakąkolwiek mnogością, należącą do zbioru Z. Jeżeli M i M_1 są dwie różne mnogości zbioru Z, to mnogości M^* oraz M_1^* nie będą oczywiście posiadały elementów wspólnych: T jest więc zbiorem mnogości nie pustych, nie posiadających elementów wspólnych, i przeto, w myśl pewnika Zermelo, istnieje mnogość N, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdej mnogości M^*, należącej

[1]) *Mathematische Annalen* 65, str. 277.

[2]) Zermelo nazywa to twierdzenie *ogólną zasadą wyboru* (Allgemeines Auswahlprinzip).

do zbioru T. Oznaczmy ogólnie przez (M, m_M) ten (jedyny) element mnogości M^*, który należy do N.

Przyporządkujmy teraz każdej mnogości M, należącej do zbioru Z, element m_M: z definicji mnogości M^* oraz uwagi, że (M, m_M) jest elementem mnogości M^*, wynika, że m_M jest elementem mnogości M. Przyporządkowanie nasze spełnia więc żądany warunek. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Najważniejszym przypadkiem szczególnym dowiedzionego twierdzenia jest ten, w którym zbiór Z jest utworzony ze wszystkich części (nie pustych) jakiejś danej mnogości. Twierdzenie opiewa wówczas że *dla każdej danej mnogości istnieje przyporządkowanie, według którego każdej jej części nie pustej odpowiada pewien element, należący do uważanej części*. Ten to właśnie przypadek szczególny t. zw. ogólnej zasady wyboru zastosował Zermelo przy dowodzie swego słynnego twierdzenia (Wohlordnungssatz), które poznamy w jednym z dalszych rozdziałów, i zapomocą którego udowodnimy jeszcze szereg różnych własności liczb kardynalnych.

B. Teorja mnogości uporządkowanych.

ROZDZIAŁ VII.

Typy porządkowe.

§ **60.** Dany zbiór U nazywamy *uporządkowanym,* jeżeli dla każdej pary a, b różnych jego elementów zawartą jest umowa, wedle której jeden z tych elementów uważamy za wcześniejszy od drugiego, co wyrażamy, pisząc $a \prec b$ dla oznaczenia, że a jest elementem wcześniejszym od b, lub $b \prec a$ — dla oznaczenia, że b jest elementem wcześniejszym od a. Umowa ta ma być nadto tego rodzaju, że zachodzą (dla wszelkich elementów a, b, c zbioru U) następujące własności:

1) *Asymetrja:*

Wzór $a \prec b$ wyklucza wzór $b \prec a$.

2) *Przechodniość:*

Ze wzorów $a \prec b$ oraz $b \prec c$ wynika zawsze $a \prec c$.

Zamiast $a \prec b$ piszèmy też $b \succ a$ (czytając: b *późniejsze* od a). O elemencie b, spełniającym warunki $a \prec b$ oraz $b \prec c$ (które łączymy często w jeden wzór: $a \prec b \prec c$) mówimy, że *leży między* elementami a i b.

Jeżeli w danym zbiorze uporządkowanym U istnieje element, od którego niema w tym zbiorze wcześniejszych, to element taki nazywamy *pierwszym* elementem uważanego zbioru. Jeżeli w zbiorze U istnieje element, od którego niema w tym zbiorze późniejszych, to element taki nazywamy *ostatnim* elementem zbioru U.

Przykłady zbiorów uporządkowanych.

1) Zbiór wszystkich liczb wymiernych będzie *uporządkowany,* jeżeli umówimy się z dwóch jakichkolwiek jego elementów uważać ten za wcześniejszy, który jest mniejszy. Można jednak jeszcze na nieskończenie wiele innych sposobów uporządkować ten zbiór. W § 13 ustawiliśmy w ciąg nieskończony wszystkie liczby wymierne; możemy się teraz umówić, aby uważać z dwuch liczb wymiernych tę za wcześniejszą, która ma mniejszy numer porządkowy w tym ciągu: otrzymamy w ten sposób nowe uporządkowanie zbioru wszystkich liczb wymiernych.

2) Zbiór wszystkich liczb naturalnych, prócz zwykłego uporządkowania według wielkości, możemy jeszcze uporządkować w ten sposób, że umówimy się uważać z dwuch liczb tę za wcześniejszą, która ma mniej dzielników, a w razie równej liczby dzielników — tę, która jest mniejszą. Czytelnik sprawdzi z łatwością, że umowa taka rzeczywiście porządkuje nasz zbiór (t. j. spełnia własności 1) i 2)). Będziemy tu mieli np.:

$$1 < 2 < 5 < 31 < 4 < 9 < 6 < 35 < 30.$$

3) Zbiór wszystkich liczb zespolonych można uporządkować w ten sposób: kładziemy $a + bi < c + di$, jeżeli $a < c$, lub jeżeli $a = c$ oraz $b < d$. Będzie więc, np.:

$$2 + 3i < 3 + 2i < 3 + 5i < 4 < 5 - 16i < 5.$$

4) Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych możemy uporządkować według t. zw. *zasady pierwszych różnic,* t. j. uważając z dwuch różnych ciągów ten jako wcześniejszy, w którym wcześniej napotkamy wyraz, mniejszy od noszącego ten sam numer porządkowy wyrazu drugiego ciągu. Jeżeli uporządkowanie to zastosujemy do ciągów, utworzonych z kolejnych mianowników rozwinięć liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe, to otrzymamy stąd uporządkowanie zbioru wszystkich liczb niewymiernych, inne niż według ich wielkości.

5) Jeżeli mamy mnogość M zbiorów Z, taką iż z każdych dwuch zbiorów, należących do M, jeden jest zawsze częścią drugiego, to mnogość M możemy uporządkować, uważając z dwuch różnych, należących do niej zbiorów zawsze ten za wcześniejszy, który jest częścią właściwą drugiego (bowiem stosunek „być częścią właściwą“ jest asymetryczny i przechodni).

Godnem uwagi jest, że każdy zbiór uporządkowany U pozwala z łatwością zbudować taką mnogość M zbiorów Z: wystarczy jako M wziąć mnogość wszystkich tak zwanych *reszt* zbioru U, gdzie resztą, odpowiadającą elementowi e zbioru U, nazywamy zbiór wszystkich elementów zbioru U, późniejszych od e.

§ **61.** Dwa zbiory uporządkowane G i Γ nazywamy *podobnemi*, jeżeli między ich elementami daje się ustalić tego rodzaju odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczna, przy której związki porządkowe między odpowiednimi elementami w obu zbiorach są te same. Jeżeli więc a i b są dwa jakiekolwiek elementy zbioru G, zaś α i β odpowiednio ich obrazy w zbiorze podobnym Γ, to wzór

$$a \prec b$$

pociąga za sobą zawsze wzór

$$\alpha \prec \beta$$

(a stąd wynika z łatwością, że i naodwrót).

Łatwo widzieć, że każdy zbiór uporządkowany jest podobny samemu sobie, oraz że dwa zbiory podobne trzeciemu są podobne między sobą. Podobieństwo zbiorów jest stosunkiem symetrycznym i przechodnim. Dla wyrażenia, że zbiory G i Γ są podobne, piszemy $G \simeq \Gamma$.

Podzielmy wszystkie zbiory uporządkowane na klasy, zaliczając do tej samej klasy wszystkie zbiory podobne między sobą. O zbiorach tej samej klasy mówimy, że są tego samego *typu porządkowego*. Typami porządkowymi możnaby nazywać symbole, służące do oznaczania omawianych klas. Możnaby też powiedzieć, że do pojęcia typu porządkowego dochodzimy, abstrahując od jakości elementów zbioru, ale nie od ich porządku (C a n t o r). Pojęcie typu porządkowego odgrywa w teorji mnogości uporządkowanych analogiczną rolę do pojęcia mocy i liczb kardynalnych w ogólnej teorji mnogości.

Zbiory uporządkowane tego samego typu są oczywiście tej samej mocy, ale niekoniecznie naodwrót. Np. zbiór wszystkich liczb naturalnych oraz zbiór wszystkich liczb wymiernych są równej mocy, ale ich typy porządkowe (przy uporządkowaniu według wielkości) są, jak łatwo widzieć, różne.

Typ mnogości uporządkowanej M oznaczamy według Cantora przez $\overline{M}$ (kreska nad M ma nam przypominać, że pojęcie typu powstaje przez pojedyńczą abstrakcję, od jakości elementów zbioru, a nie przez podwójną, od jakości i porządku, jak pojęcie mocy $\overline{\overline{M}}$).

Niech n oznacza jakąkolwiek daną liczbę naturalną. Wszystkie zbiory uporządkowane, złożone z n elementów, są, jak łatwo widzieć, podobne zbiorowi n pierwszych liczb naturalnych, wziętych w ich kolejnym porządku. Wskazanem więc będzie jako symbol odpowiedniego typu porządkowego przyjąć liczbę n.

Z mnogości uporządkowanych pozaskończonych najprostszym typem będzie ten, do którego należy zbiór wszystkich liczb naturalnych w ich kolejnym porządku:

$$1, 2, 3, \ldots;$$

typ ten oznaczamy według Cantora symbolem ω.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych ujemnych, w porządku ich wielkości względnych,

$$\ldots. -3, -2, -1$$

daje inny typ, uporządkowany *odwrotnie* niż ω: oznaczać go będziemy symbolem ω^*.

Ogólnie, jeżeli α oznacza dany typ porządkowy, to typ, uporządkowany odwrotnie, oznaczać będziemy symbolem α^*. Może się oczywiście zdarzyć, że $\alpha^* = \alpha$: tak jest np. dla każdego typu skończonego, albo dla typu, wyznaczonego przez zbiór wszystkich liczb całkowitych, uporządkowany według ich wielkości względnych.

Typ zbioru wszystkich liczb wymiernych (uporządkowanych według wielkości) oznaczony przez η, typ zbioru wszystkich liczb rzeczywistych — przez λ.

§ **62.** Niech U oznacza dany zbiór uporządkowany. *Przekrojem* zbioru U nazywamy każdy podział wszystkich elementów tego zbioru na dwie klasy A i B, nie puste i takie, iż każdy element klasy A jest wcześniejszy od każdego elementu klasy B. Podział taki oznaczamy symbolem $[A, B]$.

Jeżeli w danym przekroju $[A, B]$ klasa A posiada element ostatni, a zarazem klasa B posiada element pierwszy, to mówimy, że uważany przekrój daje *skok*. Jeżeli natomiast w przekroju $[A, B]$ ani klasa A nie posiada elementu ostatniego, ani też klasa B elementu pierwszego, to mówimy, że uważany przekrój daje *lukę*.

Zbiór uporządkowany, nie mający skoków nazywamy *gęstym*, nie mający skoków ani luk — *ciągłym*.

Więc np. w zbiorze wszystkich liczb całkowitych każdy przekrój daje skok; zbiór wszystkich liczb wymiernych jest gęsty: w zbiorze wszystkich liczb wymiernych różnych od zera, przekrój, w którym do klasy A zaliczamy liczby ujemne, a do klasy B — liczby dodatnie, daje lukę.

Łatwo widzieć, że zbiór gęsty pozostaje gęstym, jeżeli z niego usunąć dowolną skończoną liczbę elementów.

§ **63.** Przy badaniu typów porządkowych najważniejszem zagadnieniem jest wyznaczenie ich własności charakterystycznych.

Dla typów porządkowych skończonych własnością charakterystyczną jest ich moc. Podamy obecnie własności charakterystyczne typu ω. Do typu tego należy, jak wiemy, zbiór wszystkich liczb naturalnych, uporządkowany według ich wielkości, oraz każdy ciąg nieskończony, uporządkowany według kolejnych numerów jego wyrazów.

Łatwo widzieć, że każdy zbiór uporządkowany typu ω (jako podobny zbiorowi wszystkich liczb naturalnych, uporządkowanych według wielkości) posiada następujące trzy własności:

1) *posiada element pierwszy,*

2) *nie posiada elementu ostatniego,*

3) *każdy jego przekrój daje skok.*

Udowodnimy, że *wymienione trzy własności są dla typu* ω *charakterystyczne.* W tym celu należy okazać, że każdy zbiór uporządkowany U, spełniający własności 1), 2) i 3), jest typu ω [1]).

Niech więc U oznacza dany zbiór uporządkowany, spełniający warunki 1), 2) i 3). W myśl własności 1), zbiór U posiada element pierwszy: oznaczmy go przez a_1.

Określimy teraz zapomocą indukcji matematycznej pewien ciąg nieskończony elementów zbioru U,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad (1)$$

w następujący sposób. Przypuśćmy, żeśmy, przy danem naturalnem n, już określili wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tego ciągu (co jest prawdą dla $n = 1$).

Utwórzmy przekrój $[A, B]$ zbioru U, zaliczając do klasy A element a_n oraz wszystkie elementy zbioru U, wcześniejsze od a_n. Klasa A nie będzie pustą, gdyż zawiera w każdym razie element ostatni a_n, zaś klasa B nie będzie pustą, gdyż wówczas a_n byłoby ostatnim elementem zbioru U, wbrew własności 2). Jasnem jest też, że każdy element klasy A jest wcześniejszym od każdego elementu klasy B: klasy te wyznaczają więc pewien przekrój zbioru U. W myśl własności 3) przekrój ten musi dawać skok: wynika stąd, w myśl definicji skoku (§ 62), że klasa B posiada element pierwszy: oznaczmy go

[1]) Możnaby z łatwością udowodnić, że własności 1), 2) i 3) są od siebie niezależne, t. j. żadne dwie z nich nie pociągają za sobą trzeciej.

przez a_{n+1}. Będzie oczywiście $a_n < a_{n+1}$, gdyż a_n należy do klasy A; między a_n i a_{n+1} niema nadto żadnego elementu zbioru U, gdyż a_n jest ostatnim elementem klasy A, zaś a_{n+1} — pierwszym elementem klasy B.

W ten sposób określiliśmy przez indukcję ciąg nieskończony (1) elementów zbioru U, przyczem mamy

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots \qquad (2)$$

Ponieważ między a_n i a_{n+1} niema żadnego elementu zbioru U, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, więc wnosimy stąd przez łatwą indukcję, że między a_1 i a_n leżą tylko elementy $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ zbioru U (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$). Wynika stąd z łatwością, że gdyby istniał jakiś element a zbioru U, nie zawarty w ciągu (1), to element ten musiałby być albo wcześniejszym od wszystkich elementów ciągu (1), albo też od nich wszystkich późniejszym. Lecz pierwsze założenie jest niemożliwe, gdyż a_1 jest pierwszym elementem zbioru U. Załóżmy więc, że a jest elementem zbioru U, późniejszym od każdego z wyrazów ciągu (1). Oznaczmy przez A zbiór wszystkich wyrazów ciągu (1) i połóżmy $B = U - A$: zbiór B nie jest więc pusty, gdyż zawiera element a. Ponieważ, jak widzieliśmy, każdy element zbioru U nie zawarty w ciągu (1), czyli w zbiorze A, musi być późniejszy od każdego z wyrazów ciągu (1), więc każdy element zbioru B jest późniejszy od każdego elementu zbioru A. Zbiory A i B wyznaczają więc pewien przekrój zbioru U. W myśl własności 3), klasa A, czyli ciąg (1), musi więc posiadać element ostatni, co niemożliwe, wobec (2).

Założenie, że istnieje element zbioru U, nie zawarty w ciągu (1), doprowadza więc do sprzeczności. Dowiedliśmy więc, że zbiór U może być uważany jako ciąg nieskończony, którego wyrazy są uporządkowane według wielkości wskaźników. Zbiór U jest więc typu ω, c. b. d. o.

Co do typu porządkowego, do którego należy zbiór wszystkich liczb całkowitych, uporządkowanych według wielkości względnych, to możnaby udowodnić, że następujące dwie własności są dla niego charakterystyczne:

1) nie posiada elementu pierwszego ani ostatniego
2) każdy jego przekrój daje skok.

§ **64.** Okażemy obecnie, że *dla typu* η *charakterystyczne są następujące trzy własności:*

1) *nie posiada elementu pierwszego ani ostatniego,*
2) *jest gęsty,*
3) *jest przeliczalny.*

Że typ η wszystkie te trzy własności [1]) posiada, wynika stąd, że, jak łatwo widzieć, posiada je zbiór wszystkich liczb wymiernych, uporządkowanych według wielkości, który jest typu η. Dla dowodu, że wymienione trzy własności są dla typu η charakterystyczne, wystarczy więc okazać, że każde dwa zbiory uporządkowane, spełniające własności 1) 2) i 3) są podobne.

Niech więc U i V będą dwa zbiory uporządkowane, spełniające własności 1), 2) i 3). W myśl własności 3) są one przeliczalne: możemy je więc ustawić odpowiednio w ciągi nieskończone

$$u_1, u_2, u_3, \ldots . \tag{3}$$

oraz

$$v_1, v_2, v_3, \ldots . \tag{4}$$

Ustalimy teraz odwzorowanie podobne zbioru U na zbiorze V w następujący sposób.

Elementowi u_1 zbioru U przyporządkujemy element v_1 zbioru V.

Elementowi u_2 zbioru U przyporządkujmy, dalej, pierwszy wyraz v_{k_2} ciągu (4), będący w tym samym stosunku porządkowym do v_1, w jakim u_2 jest do u_1 (to znaczy pierwszy wyraz ciągu (4), wcześniejszy od v_1, jeżeli u_2 jest wcześniejsze od u_1, zaś pierwszy wyraz ciągu (4), $> v_1$, jeżeli $u_2 > u_1$). Elementowi u_3 *zbioru* U przyporządkujmy, dalej, pierwszy wyraz v_{k_3} ciągu (4), będący w tych samych stosunkach porządkowych do $v_{k_1} = v_1$ i v_{k_2}, w jakich jest u_3 do u_1 i u_2. Ogólnie, elementowi u_n zbioru U przyporządkujmy pierwszy wyraz v_{k_n} ciągu (4), będący w tych samych stosunkach porządkowych do $v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots v_{k_{n-1}}$, w jakich jest odpowiednio u_n do $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Z założeń 1) i 2) wynika natychmiast, że przyporządkowanie takie jest zawsze możliwe (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Z definicji ciągu

$$v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}, \ldots . \tag{5}$$

wynika natychmiast, że jest on częścią zbioru V, podobną zbiorowi U. Dla dowodu, że zbiory U i V są podobne, wystarczy więc okazać, że każdy element zbioru V jest jednym z wyrazów ciągu (5).

Załóżmy, dla dowodu, że jest przeciwnie, i niech v_m oznacza pierwszy wyraz ciągu (4), którego niema w ciągu (5). Wyrazy $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ ciągu (4) są wyrazami ciągu (5), np.

$$v_1 = v_{k_1}, \quad v_2 = v_{k_{n_2}}, \ldots . \quad v_{m-1} = v_{k_{n_{m-1}}}$$

[1]) Możnaby z łatwością udowodnić, że są one niezależne od siebie.

Niech r oznacza największy ze wskaźników $1, n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ i niech u_s będzie pierwszym wyrazem ciągu (3), będącym w tych samych stosunkach porządkowych do $u_1, u_2, \ldots, u_r$, w jakich jest odpowiednio v_m do $v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_r}$. Łatwo widzieć, że będzie $v_{k_s} = v_m$, wbrew założeniu, że v_m nie jest żadnym z wyrazów ciągu (5).

Dowiedliśmy więc, że własności 1), 2) i 3) są dla typu η charakterystyczne.

Jako ciekawy wniosek z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy:

Zbiór wszystkich liczb wymiernych, zbiór wszystkich liczb wymiernych, leżących wewnątrz przedziału (0,1), zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych skończonych, zbiór wszystkich liczb algebraicznych (każdy z tych zbiorów uporządkowany według wielkości) — są podobne.

§ **65.** Postaramy się obecnie wyznaczyć wszystkie typy przeliczalne gęste. Niech G będzie zbiór przeliczalny gęsty, zatem spełniający warunki 2) i 3) z § 64. Jeżeli zbiór G spełnia nadto warunek 1), to, w myśl twierdzenia z § 64, będzie typu η. Jeżeli zbiór G nie spełnia warunku 1), to możliwe są dla zbioru G oczywiście tylko trzy następujące przypadki:

1') posiada element pierwszy, lecz nie posiada ostatniego,

1'') posiada element ostatni, lecz nie posiada pierwszego,

1''') posiada element pierwszy i element ostatni.

W przypadku 1') usuńmy ze zbioru G element pierwszy, w przypadku 1'') — element ostatni, w przypadku 1''') — pierwszy i ostatni. Otrzymamy w ten sposób nowy zbiór V, spełniający, jak łatwo widzieć, warunki 1), 2) i 3), zatem typu η. Stąd wniosek, że *istnieją tylko cztery typy przeliczalne gęste:* mianowicie, prócz typu η, tylko te, które otrzymamy, dołączając do niego element pierwszy, lub element ostatni, lub wreszcie pierwszy i ostatni.

Typ η posiada jeszcze następującą ważną własność: zawiera on w sobie, jako części, wszystkie typy porządkowe przeliczalne. Zachodzi mianowicie następujące

Twierdzenie: Każdy zbiór uporządkowany przeliczalny jest podobny pewnemu zbiorowi liczb wymierzonych, uporządkowanych według wielkości.

Dla dowodu ustawmy w ciąg nieskończony:

$$w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots \qquad (6)$$

wszystkie liczby wymierne, zaś w ciąg nieskończony:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$$

wszystkie elementy danego zbioru uporządkowanego przeliczalnego U.

Przyporządkujmy elementowi u_1 liczbę wymierną w_1, elementowi u_2 — pierwszy wyraz ciągu (6), będący w tym samym stosunku porządkowym do w_1, w jakim jest u_2 do u_1 i t. d., podobnie jak przy dowodzie twierdzenia z § 64. Łatwo okazać, że w ten sposób otrzymamy pewien zbiór liczb wymiernych:

$$w_{k_1}, w_{k_2}, w_{k_3}, \ldots\ldots,$$

który, uporządkowany według wielkości, będzie podobny zbiorowi U.

§ **66.** Jeżeli dany zbiór gęsty nie jest ciągły, to można go *uzupełnić* (czyli rozszerzyć) przez wprowadzenie nowych elementów, tak, aby otrzymany w ten sposób nowy zbiór był ciągły.

Niech G oznacza dany zbiór uporządkowany, gęsty. Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich jego przekrojów $\gamma = [A, B]$, dających luki. Dołączmy do zbioru G wszystkie elementy zbioru Γ, tworząc w ten sposób nowy zbiór:

$$\mathfrak{G} = G + \Gamma.$$

Zbiór ten uporządkujemy w następujący sposób.

Dla tych elementów zbioru $\mathfrak{G}$, które są zarazem elementem zbioru G, pozostawimy w mocy ich stosunki porządkowe, w jakich były do siebie w zbiorze G. Należy więc jeszcze ustalić stosunki porządkowe elementów części Γ względem siebie, oraz względem elementów części G.

Niech $\gamma = [A, B]$ oznacza dany element zbioru Γ, g — dany element zbioru G. Element g należy w przekroju $[A, B]$ do pewnej klasy: umówimy się uważać w zbiorze $\mathfrak{G}$ element g jako wcześniejszy od elementu γ, jeżeli w uważanym przekroju g należy do klasy A, zaś jako późniejszy od γ, jeżeli g należy do klasy B.

Niech teraz $\gamma = [A, B]$ i $\gamma_1 = [A_1, B_1]$ będą dwa różne elementy zbioru Γ. Klasy A i A_1 nie mogą być identyczne, gdyż wtedy byłyby oczywiście identyczne i klasy B i B_1, a więc byłoby $\gamma = \gamma_1$, wbrew założeniu. Mamy więc $A \neq A_1$: w jednej z tych klas istnieje więc taki element zbioru G, którego niema w drugiej: np. w klasie A taki element a, którego niema w klasie A_1. Element a będzie więc w przekroju γ_1 należał do klasy B_1: wszystkie więc elementy klasy A_1 będą wcześniejsze od a, skąd (wobec $a \in A$) wniosek, że klasa A_1 jest

częścią właściwą klasy A. Jeżeli więc dwa przekroje γ i γ_1 są różne, to jedna z klas A i A_1 jest częścią właściwą drugiej. Umówimy się w zbiorze $\mathfrak{G}$ uważać element γ za wcześniejszy od γ_1, jeżeli klasa A jest częścią właściwą klasy A_1 (a więc $\gamma_1 \prec \gamma$, jeżeli $A_1 \subset A$, $A_1 \neq A$).

Dowód, że umowy powyższe istotnie ustalają *uporządkowanie* zbioru $\mathfrak{G}$, nie przedstawia żadnej trudności.

Powiadam, dalej, że zachodzi następująca własność W: między każdemi dwoma elementami zbioru $\mathfrak{G}$ leży (conajmniej jeden) element zbioru G.

Jeżeli bowiem $\gamma = [A, B]$ i $\gamma_1 = [A_1, B_1]$ są dwa elementy zbioru $\mathfrak{G}$, należące do Γ, i $\gamma \prec \gamma_1$, to klasa A jest częścią właściwą klasy A_1 i przeto w tej ostatniej istnieje element a_1, należący w przekroju γ do klasy B: jasnem jest (w myśl ustalonego uporządkowania elementów zbioru $\mathfrak{G}$), że a_1 będzie właśnie elementem zbioru G, zawartym między γ i γ_1. Jeżeli teraz, z dwóch danych elementów zbioru $\mathfrak{G}$ jeden należy do G, a drugi do Γ, np. g do G, zaś γ do Γ, i jeżeli położymy $\gamma = [A, B]$, to element g należy w przekroju γ do jednej z klas A lub B: jeżeli $g \varepsilon A$, to w klasie A istnieje element g_1 późniejszy od g (gdyż klasa A nie posiada elementu ostatniego, skoro przekrój γ, jako zaliczony do Γ, daje lukę); jeżeli $g \varepsilon B$, to w klasie B istnieje element $g_1 \prec g$ (gdyż klasa B nie posiada elementu pierwszego); w każdym razie g_1 będzie elementem, zawartym między g i γ. Jeżeli wreszcie oba dane elementy zbioru $\mathfrak{G}$ należą do G, to między nimi leży element zbioru G, gdyż, jak zakładamy, zbiór G jest gęsty. Własność W została więc udowodniona.

Z własności W wynika natychmiast, że zbiór $\mathfrak{G}$ nie posiada *skoków*. Okażemy obecnie, że zbiór $\mathfrak{G}$ nie posiada luk.

Przypuśćmy, dla dowodu, że przekrój $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ zbioru $\mathfrak{G}$ daje lukę. Kładąc $A = \mathfrak{A} . G$, $B = \mathfrak{B} . G$, otrzymamy, jak łatwo widzieć, przekrój $\gamma = [A, B]$ zbioru G. Niech a oznacza jakikolwiek element klasy A. Wobec $A = \mathfrak{A} . G$ jest więc $a \varepsilon \mathfrak{A}$, ponieważ zaś, jak zakładamy, przekrój $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ daje lukę, więc w klasie $\mathfrak{A}$ istnieje element $\alpha \succ a$. W myśl własności W istnieje więc element a_1 zbioru G, taki iż $a \prec a_1 \prec \alpha$; wobec $a_1 \prec \alpha$ oraz $\alpha \varepsilon \mathfrak{A}$, będzie $a_1 \varepsilon \mathfrak{A}$, zatem $a_1 \varepsilon \mathfrak{A} . G = A$ (gdyż $a_1 \varepsilon G$). Dla każdego elementu a klasy A istnieje więc w tej klasie element późniejszy, czyli klasa A nie posiada elementu ostatniego. Analogicznie wykazalibyśmy, że klasa B nie posiada elementu pierwszego. Przekrój $\gamma = [A, B]$ daje więc lukę i przeto γ należy do zbioru Γ, zatem też do zbioru $\mathfrak{G}$ i przeto do jednej z klas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ przekroju $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, np. $\gamma \varepsilon \mathfrak{A}$. Ponieważ uważany przekrój daje lukę, więc istnieje

w klasie $\mathfrak{A}$ element $\gamma_1 > \gamma$: w myśl własności W, istnieje też element a' zbioru G, taki iż $\gamma < a' < \gamma_1$: wobec $a' < \gamma_1 \varepsilon \mathfrak{A}$ oraz $a' \varepsilon G$, będzie $a' \varepsilon \mathfrak{A} G = A$, zaś wobec $\gamma < a'$, oraz $\gamma = [A, B]$, musi być $a' \varepsilon B$, skąd sprzeczność. Podobnież udowodnilibyśmy, że nie może być $\gamma \varepsilon \mathfrak{B}$. Założenie, że zbiór $\mathfrak{G}$ posiada lukę doprowadza zatem do sprzeczności.

Zbiór $\mathfrak{G}$ nie posiada więc skoków ani luk, czyli jest ciągły. Dowiedliśmy zatem, że rozszerzając w powyższy sposób zbiór G przez dołączenie do niego nowych elementów, *zapełniliśmy jego luki* i otrzymaliśmy zbiór ciągły.

Gdybyśmy, w szczególności, jako zbiór G przyjęli zbiór wszystkich liczb wymiernych, to powyższa metoda zapełniania luk przedstawiałaby teorję Dedekinda liczb niewymiernych [1]).

§ **67.** Okażemy obecnie, że *dla typu λ charakterystyczne są następujące trzy własności:*

1) *nie posiada elementu pierwszego ani ostatniego,*

2) *jest ciągły,*

3) *posiada część przeliczalną W, taką, że między każdemi dwoma jego elementami leży element części W.*

Że typ λ wszystkie te trzy własności posiada, wynika stąd, że posiada je zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, uporządkowanych według wielkości (który jest typu λ). Dla dowodu, że wymienione trzy własności są dla typu λ charakterystyczne, wystarczy więc okazać, że każde dwa zbiory uporządkowane, spełniające własności 1), 2) i 3), są podobne.

Niech więc U i U' będą dwa dane zbiory uporządkowane, spełniające własności 1), 2) i 3), i niech W i W' będą odpowiednie ich części przeliczalne, o których jest mowa we własności 3). Z własności 1) i 3) wynika natychmiast, że zbiory W i W': 1^0 nie posiadają elementu pierwszego ani ostatniego; 2^0 są gęste; 3^0 są przeliczalne. W myśl twierdzenia z § 64, zbiory W i W' są więc podobne: istnieje więc odwzorowanie podobne φ zbioru W na zbiorze W'.

Ustalimy teraz odwzorowanie Φ zbioru U na zbiorze U' w następujący sposób.

Jeżeli u jest elementem zbioru W, to położymy $\Phi(u) = \varphi(u)$. Niech, teraz, u oznacza dany element zbioru $U - W$. Oznaczmy przez V zbiór wszystkich tych elementów zbioru W, które są późniejsze od u (elementy takie istnieją, wobec własności 1) i 3) zbioru U), i po-

---

[1]) R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Brunświk 1872.

łóżmy $V' = \varphi(V)$: będzie to pewna część zbioru W'. Utwórzmy teraz przekrój $[A', B']$ zbioru U', zaliczając do klasy A' każdy element zbioru U', który jest wcześniejszy od każdego elementu zbioru V', i kładąc $B' = U' - A'$. Niech b' oznacza jakikolwiek element zbioru B': z definicji zbioru B' wynika, że w zbiorze V' istnieje element v', taki iż nie jest $b' < v'$, zatem jest $b' = v'$ lub $v' < b'$. Niech v oznacza element zbioru W, odpowiadający w odwzorowaniu φ elementowi v' zbioru W': wobec $v' \varepsilon V' = \varphi(V)$, będzie $v \varepsilon V$, zatem, w myśl definicji zbioru V: $v > u$. Ponieważ zbiór W jest gęsty, więc istnieje w nim element v_1, taki iż $u < v_1 < v$: w myśl definicji zbioru V będzie stąd: $v_1 \varepsilon V$, i przeto $v_1' = \varphi(v_1) \varepsilon V'$, zaś wobec $v_1 < v$, będzie $\varphi(v_1) < \varphi(v)$, czyli $v_1' < v'$ i, wobec $b' = v'$ lub $v' < b'$, będzie $v_1' < b'$. Z drugiej strony, wobec $v_1' \varepsilon V'$ i definicji klasy B', będzie $v_1' \varepsilon B'$. Dowiedliśmy więc, że dla każdego elementu b' klasy B' istnieje w tej klasie element $v'_1 < b'$. Klasa B' nie ma więc elementu pierwszego: wobec ciągłości zbioru U', klasa A' musi więc posiadać element ostatni u': otóż położymy $\Phi(u) = u'$.

Ustaliliśmy w ten sposób pewne odwzorowanie jednoznaczne Φ zbioru U na zbiorze U'. Czytelnik już dalej z łatwością udowodni, że odwzorowanie to jest wzajemnie-jednoznaczne, oraz że stosunki porządkowe między obrazami są zawsze te same, co między elementami, które odwzorowywujemy. Jest to więc odwzorowanie podobne zbioru U na zbiorze U'. Zbiory U i U' są zatem podobne, c. b. d. o.

Zauważymy, że własności 1) i 2) nie charakteryzują jeszcze typu λ. Możemy bowiem dać przykład zbioru uporządkowanego, który spełnia własności 1) i 2), ale nie spełnia własności 3). Weźmy mianowicie kwadrat K, utworzony z punktów (x, y) płaszczyzny, spełniających nierówności $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, i uporządkujmy jego punkty, umawiając się, że $(a, b) < (c, d)$, jeżeli $a < c$, lub jeżeli $a = c$, $b < d$. Czytelnik udowodni z łatwością, że, po odrzuceniu z tak uporządkowanego kwadratu K punktów $(0,0)$ i $(1,1)$, otrzymamy zbiór uporządkowany U, spełniający warunki 1) i 2). Warunek 3) jednak nie będzie spełniony, gdyż część W, o której jest mowa w tym warunku, musiałaby przy wszelkiem rzeczywistem x, takiem iż $0 < x < 1$, zawierać conajmniej jeden element e_x, leżący między elementami $(x, 0)$ oraz $(x, 1)$ zbioru U, a więc byłaby mocy continuum.

Jeżeli a i $b > a$ są dwa dane elementy jakiegoś zbioru uporządkowanego U, to zbiór, złożony z elementów a i b oraz z tych wszystkich elementów zbioru U, które leżą między a i b (jeśli takowe istnieją) nazywamy *przedziałem* (zamkniętym) (a, b). O dwuch przedziałach

(a, b) i (c, d), gdzie $a \prec c$, mówimy, że nie zachodzą na siebie, jeżeli $b \prec c$. lub $b = c$.

Łatwo widzieć, że każdy zbiór uporządkowany U, spełniający własność 3), posiada też własność (porówn. § 26):

4) Każda mnogość przedziałów, nie zachodzących na siebie, jest conajwyżej przeliczalna.

Nie wiadomo jednak dotąd, czy każdy zbiór uporządkowany, spełniający własności 1), 2) i 4), jest typu λ [1]).

---

[1]) Jest to zagadnienie Suslina (*Fund. Math.* t. I, str. 223).

ROZDZIAŁ VIII.

Działania na typach porządkowych.

§ **68.** Niech φ_1 i φ_2 będą dwa dane typy porządkowe, U_1 i U_2 zbiory uporządkowane, takie iż $\overline{U_1} = \varphi_1$, $\overline{U_2} = \varphi_2$. Możemy oczywiście zakładać, że zbiory U_1 i U_2 nie posiadają elementów wspólnych. Połóżmy

$$U = U_1 + U_2$$

i uporządkowany zbiór U w ten sposób, iż dla każdych dwuch jego elementów, należących jednocześnie do U_1, lub jednocześnie do U_2, pozostawimy ten stosunek porządkowy, w jakim są do siebie w tych zbiorach, zaś z dwuch danych elementów zbioru U, z których jeden należy do U_1, a drugi do U_2, będziemy uważali zawsze jako wcześniejszy ten, który należy do U_1.

Łatwo widzieć, że przez umowę powyższą zbiór U zostanie uporządkowany, i że, gdybyśmy zbiory U_1 i U_2 zastąpili jakimikolwiek zbiorami U_1' i U_2', byleby takimi, iż $\overline{U_1'} = \varphi_1$ i $\overline{U_2'} = \varphi_2$, otrzymalibyśmy, postępując jak wyżej, zbiór uporządkowany U', taki iż $\overline{U'} = \overline{U}$. Typ porządkowy φ zbioru U zależy więc jedynie od typów porządkowych φ_1 i φ_2 (a nie od obioru zbiorów U_1 i U_2, odpowiadających tym typom): będziemy go nazywali *sumą* typów φ_1 i φ_2, pisząc

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Przykłady: Wobec definicji typów ω i ω^* (§ 61) suma

$$\omega^* + \omega$$

będzie typem porządkowym, do którego należy zbiór wszystkich liczb całkowitych, uporządkowanych według ich wielkości względnych:

$$\ldots . < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots .$$

Suma

$$\omega + \omega^*$$

będzie przedstawiała całkiem inny typ porządkowy, do którego należy np. zbiór wszystkich odwrotności liczb całkowitych, różnych od zera, uporządkowanych według ich wielkości względnych:

$$-\frac{1}{1} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \ldots\ldots\ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$$

Typy $\omega^* + \omega$ oraz $\omega + \omega^*$ są różne: pierwszy np. nie posiada elementu pierwszego ani ostatniego, gdy tymczasem drugi posiada je oba. Pierwszy typ nie posiada luk, gdy tymczasem drugi posiada lukę.

Zbadany przykład dowodzi zarazem, że *suma typów porządkowych jest zależna od porządku składników.* Składniki sumy dwuch typów grają więc różną rolę; dlatego też dano im różne nazwy: pierwszy zwie się *dodajną* (augendus), drugi *dodajnikiem* (addendus).

Jako inny przykład weźmy sumy $1 + \omega$ oraz $\omega + 1$. W myśl definicji sumy, aby otrzymać zbiór typu $1 + \omega$, musimy wziąć zbiór złożony z jednego tylko elementu, np. a_0, oraz zbiór typu ω, np. ciąg nieskończony $a_1, a_2, a_3 \ldots .$, uporządkowany według kolejnych wskaźników, i, utworzywszy sumę obu zbiorów, uważać a_0 jako element wcześniejszy od każdego wyrazu ciągu $a_k (k = 1, 2, \ldots)$, w którym pozostawiamy dawne uporządkowanie wyrazów). Otrzymamy w ten sposób zbiór uporządkowany:

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < , \ldots ,$$

który, jak łatwo widzieć, jest również typu ω. Mamy więc

$$1 + \omega = \omega.$$

Natomiast dla sumy $\omega + 1$ otrzymalibyśmy zbiór uporządkowany

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots . < a_0 ,$$

którego typ jest różny od ω (gdyż posiada element ostatni, którego typ ω nie posiada). Mamy więc

$$\omega + 1 \neq \omega$$

i przeto $\omega + 1 \neq 1 + \omega$.

Podobnież znaleźlibyśmy z łatwością

$$1 + \omega^* \neq \omega^* + 1 = \omega^*.$$

W pewnych przypadkach atoli suma dwuch typów może nie zależeć od porządku składników, nawet gdy składniki te są różne. Np. kładąc $\xi = \omega + \omega^*$, będziemy mieli, jak łatwo widzieć

$$1 + \xi = \xi + 1$$

(obie sumy są tu $= \xi$).

Jako inny przykład na sumę dwuch typów, weźmy wzór

$$\eta + \eta = \eta.$$

Dla dowodu tego wzoru wystarczy zauważyć, że typ $\eta + \eta$ spełnia własności 1), 2) i 3), charakterystyczne dla typu η (§ 64).

Natomiast

$$\lambda + \lambda \neq \lambda,$$

gdyż typ $\lambda + \lambda$ posiada lukę.

Jako inny jeszcze przykład sumy typów, zauważymy wzór:

$$(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$$

dla wszelkich typów α i β, np.

$$(\omega + 1)^* = 1 + \omega^*, \ (\omega + \omega)^* = \omega^* = \omega^*.$$

Pojęcie sumy typów porządkowych uogólniamy natychmiast na dowolną skończoną liczbę typów, przyczem, jak łatwo widzieć, suma taka posiada zawsze pewne łączności. Np.

$$(\omega + 1) + \omega = \omega + (1 + \omega) = \omega + \omega.$$

Jako przykłady sumy kilku typów, zauważymy wzory

$$\eta + 1 + \eta = \eta, \quad \lambda + 1 + \lambda = \lambda,$$

które łatwo sprawdzić, opierając się na twierdzeniach z §§ 64 i 67.

§ **69.** Pojęcie sumy typów porządkowych możemy z łatwością uogólnić na szeregi nieskończone. Niech

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \qquad (1)$$

będzie dany ciąg nieskończony typów porządkowych. Weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony zbiorów uporządkowanych

$$U_1, U_2, U_3, \ldots, \qquad (2)$$

takich, iż $U_n = \alpha_n$, dla $n = 1, 2, 3 \ldots$ Możemy przytem oczywiście zakładać, że zbiory (2) są rozłączne. Połóżmy

$$U = U_1 + U_2 + U_2 + \ldots . \qquad (3)$$

i uporządkujmy zbiór U w następujący sposób: jeżeli dwa dane elementy zbioru U należą do tego samego składnika U_n szeregu (3), to pozostawmy dla nich ten sam stosunek porządkowy, w jakim były do siebie w zbiorze U_n; jeżeli zaś dane elementy należą do różnych składników szeregu (3), to uważajmy ten z nich jako wcześniejszy, który należy do wcześniejszego składnika. Łatwo widzieć, że przez taką umowę zbiór U zostanie uporządkowany, i że typ jego będzie zależał jedynie od ciągu typów porządkowych (1), a nie od obioru zbiorów (2), odpowiadających typom (1).

Możemy więc powiedzieć, że *każdy dany szereg nieskończony typów porządkowych posiada oznaczoną w zupełności sumę.*

Będziemy mieli np.

$$\omega = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

lecz również

$$\omega = 2 + 2 + 2 + \ldots = 1 + 2 + 3 + \ldots = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots .$$

Jako inny przykład szeregu nieskończonego typów, czytelnik sprawdzi z łatwością, opierając się na własnościach typu η (§ 64), wzór:

$$\eta = \eta + \eta + \eta + \ldots .$$

Podobnież, opierając się na własnościach typu λ (§ 67), możnaby z łatwością udowodnić, że

$$\lambda = \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \ldots .$$

Jako dalszy przykład, zauważymy, że sumą szeregu nieskończonego

$$\omega + \omega + \omega + \ldots .$$

będzie typ, odpowiadający zbiorowi, określonemu w przykładzie 2) z § 60.

Zauważymy jeszcze pewien przykład ogólniejszej natury. Niech

$$n_1, n_2, n_3, \ldots \qquad (2)$$

oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony liczb naturalnych, i połóżmy $\varphi = \omega^* + \omega$. Każdemu ciągowi liczb naturalnych (4) przyporządkujmy sumę szeregu nieskończonego typów

$$\varphi + n_1 + \varphi + n_2 + \varphi + n_3 + \ldots . \qquad (5)$$

Możnaby udowodnić, że różnym ciągom (4) będą odpowiadały zawsze różne sumy (5). Każda z sum (5) daje oczywiście pewien typ przeliczalny: stąd wniosek, że mnogość wszystkich typów porządkowych przeliczalnych jest mocy $\geqslant \mathfrak{c}$. Z drugiej strony jest ona mocy $\leqslant \mathfrak{c}$, gdyż, jak to wynika z twierdzenia udowodnionego w § 65, typów przeliczalnych jest nie więcej niż części zbioru wszystkich liczb wymiernych, a więc nie więcej niż $\mathfrak{c}$ (§ 41). Zatem *mnogość wszystkich typów przeliczalnych jest mocy continuum.*

§ **70.** Niech Ψ będzie daną mnogością uporządkowaną, której elementami są typy porządkowe φ. Zastąpmy każdy z tych typów φ przez zbiór uporządkowany typu φ; możemy oczywiście zakładać, że zbiory te nie będą posiadały elementów wspólnych. Otrzymamy w ten sposób mnogość uporządkowaną M, której elementami będą zbiory uporządkowane U. Niech S oznacza sumę wszystkich zbiorów, tworzących mnogość M: uporządkujmy zbiór S w ten sposób, że dla każdych dwuch jego elementów, należących do tego samego składnika U sumy S, pozostawimy ten stosunek porządkowy, w jakim były do siebie w zbiorze U, zaś z dwuch elementów, należących do różnych składników sumy S, będziemy uważali ten jako wcześniejszy, który należy do wcześniejszego składnika. Łatwo widzieć, że w ten sposób otrzymamy zbiór uporządkowany, którego typ σ będzie zależał jedynie od mnogości uporządkowanej Ψ, typów φ. Typ porządkowy σ nazywamy *sumą typów porządkowych* φ, *tworzących mnogość uporządkowaną typów,* Ψ. Każda dana mnogość uporządkowana typów daje więc oznaczoną w zupełności sumę; suma taka zależy wogóle od uporządkowania składników, natomiast posiada prawo łączności. Łatwo też widzieć, że przypadkami szczególnymi określonej w ten sposób sumy, będą szeregi skończone i nieskończone typów.

W szczególności, jeżeli mnogość Ψ jest typu ψ, a jej elementami są typy porządkowe, wszystkie równe φ, to naturalnem będzie sumę wszystkich tych typów nazywać iloczynem, którego *mnożną* (multiplicandus) jest φ, zaś *mnożnikiem* (multiplicator) ψ, i oznaczać $\varphi . \psi$.

W ten sposób będziemy mieli np., dla każdego typu porządkowego φ:

$$\varphi . \omega = \varphi + \varphi + \varphi + \dots . \tag{6}$$

§ **71.** Iloczyn dwuch typów porządkowych $\varphi . \psi$ możemy też określić bezpośrednio. Niech U i V będą dwa zbiory uporządkowane, takie iż $\overline{\overline{U}} = \varphi$, $\overline{\overline{V}} = \psi$. Oznaczmy przez P zbiór wszystkich układów (u, v), gdzie u jest jakimkolwiek elementem zbioru U, zaś v jakimkolwiek elementem zbioru V i uporządkujmy zbiór P, przyjmując

$$(u, v) \prec (u_1, v_1),$$

jeżeli

$$v \prec v_1 \text{ (w zbiorze } V),$$

lub jeżeli jednocześnie

$$v = v_1 \text{ oraz } u \prec u_1 \text{ (w zbiorze } U)$$

(będzie to więc uporządkowanie układów (u, v) według t. zw. *zasady ostatnich różnic.*

Typ uporządkowanego w ten sposób zbioru P (zależący, jak łatwo widzieć, jedynie od typów φ i ψ) będzie iloczynem $\varphi . \psi$.

Łatwo widzieć, że powyższa definicja iloczynu dwuch typów jest równoważna podanej w § 70.

Jako przykład iloczynu dwuch typów, obliczmy iloczyn $2 . \omega$. Jako zbiór U typu 2 możemy wziąć zbiór złożony z liczb 1 i 2, zaś jako zbiór V typu ω — zbiór wszystkich liczb naturalnych, oba uporządkowane według wielkości. Zbiór P będzie tu więc zbiorem wszystkich układów (u, v), gdzie $u = 1$ lub 2, zaś v jest jakąkolwiek liczbą naturalną: porządkując zbiór P według zasady ostatnich różnic, otrzymamy ciąg:

$$(1,1) \prec (2,1) \prec (1,2) \prec (2,2) \prec (1,3) \prec (2,3) \prec (1,4) \prec \ldots.$$

typu ω. Mamy więc

$$2 . \omega = \omega .$$

Obliczmy teraz iloczyn $\omega . 2$. Jako zbiór U typu ω możemy teraz wziąć zbiór wszystkich liczb naturalnych, zaś jako zbiór V typu 2 — zbiór złożony z liczb 1 i 2, oba uporządkowane według wielkości. Odnośny zbiór układów P, uporządkowany według zasady ostatnich różnic, będzie:

$$(1,1) \prec (2,1) \prec (3,1) \prec \ldots \prec (1,2) \prec (2,2) \prec (3,2) \prec \ldots,$$

a więc daje typ $\omega + \omega$. Mamy więc

$$\omega . 2 = \omega + \omega$$

i przeto $\omega . 2 \neq 2 . \omega$. Iloczyn typów porządkowych nie posiada więc prawa przemienności.

Iloczyn typów porządkowych uogólniamy natychmiast na dowolną skończoną liczbę czynników, przytem jak, łatwo widzieć, zachodzi tu zawsze prawo *łączności*

$$(\varphi . \psi) . \vartheta = \varphi . (\psi . \vartheta),$$

jakoteż prawo *rozdzielności*, ale w jednej tylko ze swych postaci, mianowicie, gdy drugi czynnik (mnożnik) jest sumą:

$$\varphi(\psi + \vartheta) = \varphi\psi + \varphi\vartheta.$$

Natomiast mamy np.

$$(1 + 1) . \omega \neq 1 . \omega + 1 . \omega,$$

gdyż lewa strona wynosi ω, zaś prawa $\omega + \omega$.

Łatwo widzieć, że przy naturalnem n iloczyn $\varphi . n$ jest zawsze sumą n składników, równych φ:

$$\varphi . n = \underset{1}{\varphi} + \underset{2}{\varphi} + \ldots . + \underset{n}{\varphi}$$

(dla każdego typu porządkowego φ). Dla iloczynu $\varphi . \omega$ wyprowadziliśmy analogiczny wzór (6) w § 70; więc np., dla $\varphi = \omega$, będzie

$$\omega . \omega = \omega + \omega + \omega + \ldots .$$

Iloczyn n czynników równych φ oznaczamy przez φ^n.

Zauważymy jeszcze wzór

$$(\varphi\psi)^* = \varphi^* \psi^*.$$

Obliczymy teraz iloczyn η^n. Z definicji iloczynu dwuch typów wynika z łatwością, że jeżeli każdy z czynników φ i ψ posiada którąkolwiek z własności 1), 2) i 3), wymienionych w § 64, to tę samą własność posiada też iloczyn $\varphi . \psi$. Wnosimy stąd natychmiast, w myśl twierdzenia udowodnionego w § 64, że iloczyn $\eta . \eta$ jest znowu typu η, czyli $\eta^2 = \eta$ i, ogólniej

$$\eta^n = \eta, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dla typu λ natomiast mamy $\lambda^2 \neq \lambda$, gdyż typ λ^2 nie jest ciągły. Możnaby udowodnić, że typ $(1 + \lambda + 1)^2$ jest ciągły, ale różny od typu $\vartheta = 1 + \lambda + 1$ (ϑ jest to, jak łatwo widzieć, typ zbioru punktów skończonego odcinka, wraz z końcami, w porządku naturalnym punktów; według typu ϑ^2 uporządkowaliśmy punkty kwadratu K w § 67). Ogólniej, możnaby udowodnić, że typy ϑ^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są wszystkie ciągłe i różne.

ROZDZIAŁ IX.

Zbiory dobrze uporządkowane.

§ **72.** *Dobrze uporządkowanym* nazywamy zbiór uporządkowany, którego każda część nie pusta posiada element pierwszy [1].

Przykłady. Każda mnogość uporządkowana skończona jest oczywiście dobrze uporządkowana [2]. Zbiory typów ω, $\omega + 1$, $\omega + \omega$, $\omega . \omega$ są, jak łatwo widzieć, dobrze uporządkowane. Natomiast zbiory typów ω^*, η, λ nie są dobrze uporządkowane.

Niech D oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany, C — daną jego część nie pustą. Łatwo widzieć, że jeżeli dla elementów zbioru C pozostawimy te same stosunki porządkowe, jakie zachodziły między nimi w zbiorze D, to zbiór C będzie zbiorem dobrze uporządkowanym.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że każda część nie pusta zbioru C jest zarazem częścią nie pustą zbioru D, a więc musi posiadać element pierwszy. Wynika stąd, że zbiór dobrze uporządkowany nie zawiera żadnej części typu ω^* [3].

§ **73.** Zbiory dobrze uporządkowane posiadają następującą ważną własność. Niech D oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany, Z jakikolwiek dany zbiór, spełniający następujące dwa warunki:

---

[1]) Jak łatwo widzieć, możnaby też powiedzieć: którego każda część właściwa posiada element pierwszy.

[2]) Każda część nie pusta mnogości uporządkowanej skończonej posiada nie tylko element pierwszy, ale i ostatni. Własność ta jest dla mnogości skończonych charakterystyczna: każda mnogość uporządkowana, której każda część nie pusta posiada element pierwszy i element ostatni, jest skończona.

[3]) Zapomocą pewnika Zermelo można z łatwością udowodnić, że własność ta jest dla zbiorów dobrze uporządkowanych charakterystyczna.

1) Pierwszy element zbioru D należy do Z.

2) Jeżeli a jest takim elementem zbioru D, że każdy element zbioru D, wcześniejszy od a, należy do Z, to a również należy do Z.

Łatwo widzieć, że z założeń tych wynika, iż $D \subset Z$. W samej rzeczy, załóżmy, że tak nie jest, że więc istnieją elementy zbioru D nie należące do Z: zbiór $C = D - Z$ nie jest więc pusty. Z drugiej strony zbiór C, jako część zbioru dobrze uporządkowanego D, posiada element pierwszy a. Rozróżnimy dalej dwa przypadki:

1°. a jest pierwszym elementem zbioru D. Wówczas, z własności 1) wynikałoby, że a należy do Z, co niemożliwe, gdyż $a \varepsilon C = D - Z$.

2°. a nie jest pierwszym elementem zbioru D. Niech a' oznacza jakikolwiek element zbioru D, taki, iż $a' \prec a$; a' nie może należeć do C, gdyż wówczas a nie byłoby pierwszym elementem zbioru C. Wobec a' non ε $C = D - Z$ oraz $a' \varepsilon D$, mamy $a' \varepsilon Z$. Każdy więc wcześniejszy od a element zbioru D należy do Z, skąd, w myśl własności 2), wynika, że a należy do Z, co niemożliwe, wobec $a \varepsilon C = D - Z$.

Założenie, że nie jest $D \subset Z$, doprowadza więc do sprzeczności. Dowiedliśmy więc, że $D \subset Z$.

Nazwijmy własnością W własność zbioru uporządkowanego D, polegającą na tem, że D posiada element pierwszy, oraz że każdy zbiór Z, spełniający warunki 1) i 2), zawiera zbiór D. Okażemy, że własność W jest dla zbiorów dobrze uporządkowanych charakterystyczna. Wystarczy oczywiście już tylko udowodnić, że jeżeli zbiór uporządkowany D posiada własność W, to każda część jego nie pusta posiada element pierwszy.

Niech więc C oznacza dowolną daną część nie pustą zbioru D i przypuśćmy, że C nie posiada elementu pierwszego. Wynika stąd, że pierwszy element zbioru D (który istnieje, w myśl własności W) jest wcześniejszy od każdego elementu części C. Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich tych elementów zbioru D, które są wcześniejsze od każdego elementu części C: zbiór Z będzie więc spełniał warunek 1). Łatwo też widzieć, że zbiór Z będzie spełniał i warunek 2). W samej rzeczy, niech a oznacza taki element zbioru D, że każdy wcześniejszy od niego element zbioru D należy do Z. Gdyby element a należał do C, to byłby to pierwszy element zbioru C (gdyż każdy wcześniejszy od a element zbioru D należy do Z, a więc jest wcześniejszy od każdego elementu zbioru C), wbrew założeniu, że C nie posiada elementu pierwszego. Podobnież element a nie jest późniejszy od żadnego elementu zbioru C, gdyż żaden wcześniejszy od a ele-

ment zbioru D nie należy do C (należąc do Z). Zatem element a jest wcześniejszy od każdego elementu zbioru C, czyli $a \varepsilon Z$.

Wobec własności W (i uwagi, że zbiór Z spełnia warunki 1) i 2)), wnosimy więc, że $D \subset Z$, co niemożliwe, gdyż $C \neq 0$, $C \subset D$, $CZ = 0$.

Dowiedliśmy więc, że własność W jest dla zbiorów dobrze uporządkowanych charakterystyczna.

Niech teraz T oznacza jakiekolwiek dane twierdzenie, spełniające następujące dwa warunki:

1^0. Twierdzenie T jest prawdziwe dla pierwszego elementu zbioru D.

2^0. Jeżeli a jest takim elementem zbioru D, że twierdzenie T jest prawdziwe dla każdego elementu zbioru D, wcześniejszego od a, to twierdzenie T jest prawdziwe dla elementu a.

Nazwijmy własnością W_1 własność zbioru uporządkowanego D, polegającą na tem, że D posiada element pierwszy, oraz że każde twierdzenie T, spełniające warunki 1^0 i 2^0, jest prawdziwe dla każdego elementu zbioru D. Udowodnimy, że własność W_1 jest równoważna własności W.

Załóżmy, że zbiór uporządkowany D posiada własności W i niech T oznacza jakiekolwiek dane twierdzenie, spełniające warunki 1^0 i 2^0. Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich tych elementów zbioru D, dla których twierdzenie T jest prawdziwe. Z założeń 1^0 i 2^0 wynika, że zbiór Z spełnia warunki 1) i 2), stąd zaś, i z założenia, że zbiór D posiada własność W, wynika, że $D \subset Z$, czyli że twierdzenie T jest prawdziwe dla każdego elementu zbioru D. Dowiedliśmy więc, że własność W pociąga za sobą własność W_1.

Niech teraz D oznacza zbiór uporządkowany, posiadający własność W_1 i niech Z będzie dowolnym danym zbiorem, spełniającym warunki 1) i 2). Oznaczmy przez T twierdzenie o elemencie zbioru D, orzekające, że element ten należy do zbioru Z. Z założenia, że zbiór Z spełnia warunki 1) i 2), wynika natychmiast, że twierdzenie T spełnia warunki 1^0 i 2^0. Stąd, wobec założenia, że zbiór D posiada własność W_1, wynika, że twierdzenie T jest prawdziwe dla każdego elementu zbioru D, czyli ze $D \subset Z$. Dowiedliśmy więc, że własność W_1 pociąga za sobą własność W. Równoważność własności W i W_1 została więc udowodnioną.

Własność W_1 uważać możemy jako uogólnienie zasady indukcji matematycznej: nazywamy ją *zasadą indukcji pozaskończonej*.

Ponieważ, jak dowiedliśmy, własność W_1 jest równoważna wła-

sności W, zaś tą ostatnią, jak udowodniliśmy wyżej, posiadają zbiory dobrze uporządkowane i tylko takie zbiory, więc ostatecznie możemy powiedzieć:

Na to, aby dla danego zbioru uporządkowanego była stosowalną zasada indukcji pozaskończonej, potrzeba i wystarcza, iżby zbiór ten był dobrze uporządkowany.

Już ta okoliczność wskazuje na to, jak ważną rolę odgrywają zbiory dobrze uporządkowane.

§ **74.** Jeżeli każdemu elementowi a zbioru dobrze uporządkowanego D przyporządkowany jest pewien element $f(a)$ tego zbioru, to mówimy, że mamy w zbiorze D określoną *funkcję* $f(a)$. Jeżeli dla $a_1 < a_2$ mamy zawsze $f(a_1) < f(a_2)$, to funkcję $f(a)$ nazywamy *rosnącą*.

Powiadam, że *jeżeli $f(a)$ jest funkcją rosnącą, określoną w zbiorze dobrze uporządkowanym D, to dla żadnego elementu a zbioru D nie może być $f(a) < a$.*

Załóżmy, dla dowodu, że dla pewnego elementu a zbioru D mamy

$$f(a) < a. \qquad (1)$$

Elementy a zbioru D, dla których zachodzi wzór (1), tworzą więc pewną część nie pustą C zbioru D, która musi posiadać element pierwszy a_0 (ponieważ zbiór D jest dobrze uporządkowany). W myśl (1) będzie więc

$$f(a_0) < a_0; \qquad (2)$$

połóżmy $a_1 = f(a_0)$: będzie to pewien element zbioru D, i, wobec (2), będzie

$$a_1 < a_0, \qquad (3)$$

skąd, z uwagi że funkcja f jest rosnącą, otrzymujemy

$$f(a_1) < f(a_0),$$

czyli $f(a_1) < a_1$, skąd $a_1 \varepsilon C$, co niemożliwe, wobec (3), ponieważ a_0 jest pierwszym elementem części C. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Każda funkcja rosnąca, określona dla wszystkich elementów zbioru dobrze uporządkowanego D, wyznacza, jak łatwo widzieć, pewne odwzorowanie podobne zbioru D na pewnej jego części (na zbiorze wszystkich wartości uważanej funkcji). Ale i naodwrót: każde odwzorowanie podobne zbioru D na jego części wyznacza pewną funkcję rosnącą, określoną w tym zbiorze (jeżeli bowiem $f(a)$ oznacza obraz elementu a w uważanem odwzorowaniu podobnem zbioru D na jego

części, to z $a_1 < a_2$ wynika zawsze $f(a_1) < f(a_2)$, zatem funkcja f jest rosnąca). Z dowiedzionego twierdzenia o funkcjach rosnących wynika więc, że *nie istnieje odwzorowanie podobne zbioru dobrze uporządkowanego na jego części, przy którem obrazem pewnego elementu a byłby element wcześniejszy od a.*

Przypuśćmy teraz, że zbiór dobrze uporządkowany D jest odwzorowany podobnie na samym sobie: niech funkcja $f(a)$ wyznacza uważane odwzorowanie, funkcja $\varphi(a)$ — odwzorowanie odwrotne. Funkcje $f(a)$ i $\varphi(a)$ są więc rosnące. W myśl naszego twierdzenia, nie może więc być dla żadnego elementu a zbioru D: $f(a) < a$. Gdyby dla jakiegoś elementu a zbioru D było $f(a) > a$, to, z uwagi że funkcja φ jest rosnącą i że $\varphi(f(a)) = a$, mielibyśmy $\varphi(f(a)) > \varphi(a)$, czyli $\varphi(a) < a$, co niemożliwe, w myśl naszego twierdzenia. Musi więc być $f(a) = a$ dla każdego elementu a zbioru D. Zatem: *zbiór dobrze uporządkowany może być odwzorowany podobnie na samym sobie tylko tożsamościowo.* Wynika stąd natychmiast

Twierdzenie: Dwa zbiory dobrze uporządkowane podobne mogą być odwzorowane podobnie jeden na drugim tylko w jeden sposób.

W samej rzeczy: dwa różne odwzorowania podobne jednego zbioru na drugim wyznaczają zarazem pewne nietożsamościowe odwzorowanie podobne każdego z tych zbiorów na samym sobie.

§ **75.** Niech D oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany, a— dany jego element. Zbiór wszystkich elementów zbioru a, wcześniejszych od a, nazywamy *odcinkiem* zbioru D, utworzonym przez element a i oznaczamy przez $A(a)$; jeżeli a jest pierwszym elementem zbioru D, to odcinek $A(a)$ jest zbiorem pustym. Każdy element a zbioru D wyznacza w ten sposób pewien odcinek $A(a)$ tego zbioru, ale i naodwrót: każdemu odcinkowi zbioru D odpowiada oznaczony element, który go tworzy (pierwszy element zbioru D, późniejszy od wszystkich elementów uważanego odcinka).

Z twierdzenia, udowodnionego w § 74 wynika, że zbiór dobrze uporządkowany nie może być podobny żadnej części swego odcinka (gdyż w odwzorowaniu podobnem zbioru D na części C jego odcinka $A(a)$ elementowi a zbioru D musiałby odpowiadać pewien element a_1 odcinka $A(a)$, zatem element wcześniejszy od a, co niemożliwe, w myśl twierdzenia z § 74). W szczególności, *zbiór dobrze uporządkowany nie może być podobny swemu odcinkowi.*

Jasnem jest, że z dwuch różnych odcinków tego samego zbioru dobrze uporządkowanego D zawsze jeden jest odcinkiem drugiego.

(Jeżeli bowiem $A(a_1)$ i $A(a_2)$ są dwa różne odcinki zbioru D, to elementy a_1 i a_2 są różne, więc np. $a_1 \prec a_2$, a wówczas zbiór $A(a_1)$ jest oczywiście odcinkiem zbioru $A(a_2)$). Dwa różne odcinki tego samego zbioru dobrze uporządkowanego nie mogą więc być podobne. Z dwuch różnych odcinków danego zbioru D nazywamy ten mniejszym, który jest odcinkiem drugiego. Jeżeli więc a_1 i a_2 są dwa elementy zbioru D, takie iż $a_1 \prec a_2$, to będzie $A(a_1) < A(a_2)$ (przyczem odcinek pusty należy uważać jako mniejszy od każdego innego odcinka). Wynika stąd (i z uwagi że odpowiedniość między elementami zbioru D a jego odcinkami jest wzajemnie-jednoznaczna), że *zbiór wszystkich odcinków zbioru dobrze uporządkowanego D, uporządkowany według wielkości, jest podobny zbiorowi D.*

Jeżeli zatem dwa zbiory dobrze uporządkowane są podobne, to i zbiory ich odcinków, uporządkowane według wielkości, są podobne i naodwrót. Ponieważ zbiór wszystkich odcinków danego zbioru dobrze uporządkowanego jest dobrze uporządkowany (według wielkości), jako podobny uważanemu zbiorowi, więc *w każdym zbiorze odcinków danego zbioru dobrze uporządkowanego istnieje odcinek najmniejszy.*

Jeżeli dwa zbiory dobrze uporządkowane są podobne, to każdemu odcinkowi jednego z tych zbiorów odpowiada odcinek podobny (oczywiście jeden tylko) drugiego. Udowodnimy obecnie twierdzenie odwrotne: *Jeżeli dla każdego odcinka zbioru dobrze uporządkowanego D istnieje odcinek podobny zbioru dobrze uporządkowonego D' i naodwrót, to zbiory D i D' są podobne.*

W samej rzeczy, niech a oznacza dowolny dany element zbioru D. W myśl założenia, dla odcinka $A(a)$ zbioru D istnieje (oczywiście jeden tylko) odcinek podobny B zbioru D': niech b oznacza element zbioru D', tworzący odcinek B; połóżmy $f(a) = b$. Powiadam, że funkcja $f(a)$ wyznacza odwzorowanie podobne zbioru D na zbiorze D'. Istotnie, niech b oznacza dowolny dany element zbioru D': odcinkowi $B(b)$ zbioru D' odpowiada odcinek podobny A zbioru D; jeżeli a jest elementem zbioru D, tworzącym odcinek A, to będzie oczywiście $f(a) = b$: Każdy element zbioru D' jest więc obrazem pewnego elementu zbioru D. Jeżeli wreszcie a_1 i a_2 są elementy zbioru D, takie iż $a_1 \prec a_2$, to mamy oczywiście $A(a_1) < A(a_2)$ i, dla $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, będzie $B(b_1) < B(b_2)$, zatem $b_1 \prec b_2$, czyli $f(a_1) \prec f(a_2)$, co dowodzi, że każdy element zbioru D' jest obrazem jednego tylko elementu zbioru D i że funkcja $f(a)$ wyznacza odwzorowanie podobne zbioru D na zbiorze D'.

Przypuśćmy teraz, że w jednym ze zbiorów D i D' istnieje od-

cinek, który niema podobnego sobie w drugim zbiorze, np. że w zbiorze D istnieje odcinek, który niema podobnego sobie w zbiorze D'. Niech $A(a)$ oznacza najmniejszy z takich właśnie odcinków zbioru D. Powiadam, że wówczas każdy odcinek zbioru D' posiada podobny sobie w zbiorze D. W samej rzeczy, gdyby istniały odcinki zbioru D', nie mające podobnych sobie w zbiorze D, to niech $B(b)$ oznacza najmniejszy z nich. Każdy odcinek $B(b')$ zbioru $B(b)$, jako odcinek zbioru D' mniejszy od $B(b)$, posiada więc podobny sobie $A(a')$ w zbiorze D, przyczem musi być $A(a') < A(a)$, gdyż w razie $A(a') \geqslant A(a)$ odcinek $A(a)$ byłby podobny odcinkowi $B(b')$ albo też odcinkowi tego odcinka, a więc w każdym razie pewnemu odcinkowi zbioru D', co niemożliwe, wobec definicji odcinka $A(a)$. Każdy odcinek zbioru $B(b)$ posiada więc podobny sobie w zbiorze $A(a)$. Lecz zupełnie taksamo dowiedlibyśmy, że i naodwrót: każdy odcinek zbioru $A(a)$ posiada podobny sobie w zbiorze $B(b)$: w myśl dowiedzionego wyżej twierdzenia, zbiory $A(a)$ i $B(b)$ byłyby więc podobne, znowu wbrew definicji odcinka $A(a)$. Niemożliwem jest więc, iżby w zbiorze D' istniał odcinek, nie mający podobnego w zbiorze D. Każdy więc odcinek $B(b')$ zbioru D' posiada podobny sobie $A(a')$ w zbiorze D, przyczem, jak wyżej, wnosimy, że musi być $A(a') < A(a)$.

Każdy odcinek zbioru D' posiada więc podobny sobie w zbiorze $A(a)$ i, oczywiście, naodwrót (wobec definicji odcinka $A(a)$): wnosimy stąd, w myśl dowiedzionego wyżej twierdzenia, że zbiory D' oraz $A(a)$ są podobne, czyli, że zbiór D' jest podobny pewnemu odcinkowi zbioru D.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli w zbiorze D istnieje odcinek, nie mający podobnego sobie w zbiorze D', to zbiór D' jest podobny pewnemu odcinkowi zbioru D. Jeżeli wiec w zbiorze D' istnieje odcinek, nie mający podobnego sobie w zbiorze D, to zbiór D jest podobny pewnemu odcinkowi zbioru D'. Prócz tych dwuch przypadków zachodzić może oczywiście jeszcze tylko ten, że każdy odcinek zbioru D ma podobny sobie w zbiorze D' i naodwrót, a wtedy, jak dowiedliśmy wyżej, zbiory D i D' są podobne. Mamy więc

Twierdzenie: Dwa zbiory dobrze uporządkowane albo są podobne, albo też jeden z nich jest podobny pewnemu odcinkowi drugiego.

Oczywiście, jeżeli zbiór D jest podobny odcinkowi zbioru D', to nie może być naodwrót, ani też zbiory D i D' nie mogą być podobne, wobec twierdzenia, że żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny swemu odcinkowi.

Udowodnimy jeszcze, że *każda część zbioru dobrze uporządkowanego jest podobna albo całemu zbiorowi, albo jego odcinkowi.*

Gdyby bowiem było inaczej, to, w myśl dowiedzionego twierdzenia, zbiór dobrze uporządkowany byłby podobny odcinkowi swej części: przy odwzorowaniu, ustalającem to podobieństwo, element zbioru, tworzący uważany odcinek części, przeszedłby na element tego odcinka, a więc na element wcześniejszy od siebie, co, jak dowiedliśmy w § 74, jest niemożliwe.

§ **76.** Typy porządkowe (§ 61) zbiorów dobrze uporządkowanych nazywamy *liczbami porządkowemi.*

Jeżeli φ i ψ są dwie dane różne liczby porządkowe, to z udowodnionego w § 75 twierdzenia wynika z łatwością, że albo każdy zbiór typu φ jest podobny pewnemu odcinkowi każdego zbioru typu ψ, albo też naodwrót. W pierwszym przypadku umówimy się pisać $\varphi < \psi$, w drugim: $\psi < \varphi$ (lub $\varphi > \psi$). Każde więc dwie liczby porządkowe dadzą się zawsze połączyć jednym i tylko jednym ze znaków $>$, $=$, $<$. Łatwo też widzieć, że każdy z tych znaków posiada prawo *przechodniości.* Do liczb porządkowych wygodnie jest też dołączyć liczbę 0, którą należy uważać jako mniejszą od każdej innej liczby porządkowej.

Niech D oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany typu φ. Niech, dalej, a oznacza dowolny dany element zbioru D i niech $\psi(a)$ będzie typem porządkowym odcinka $A(a)$ (przyczem $\psi(a) = 0$, jeżeli a jest pierwszym elementem zbioru D): będzie oczywiście $\psi(a) < \varphi$, przytem $\psi(a_1) < \psi(a_2)$, jeżeli $a_1 < a_2$. Każdemu elementowi zbioru D odpowiada więc pewna liczba porządkowa $\psi < \varphi$, przytem późniejszemu elementowi zawsze większa liczba. Z drugiej strony każda liczba porządkowa $\psi < \varphi$ odpowiada pewnemu elementowi zbioru D: w samej rzeczy, jeżeli $\psi < \varphi$, to zbiór D_1 typu ψ jest podobny pewnemu odcinkowi $A(a)$ zbioru D i jasnem jest, że będziemy mieli $\psi = \psi(a)$. Zatem:

Zbiór dobrze uporządkowany typu φ jest podobny zbiorowi wszystkich liczb porządkowych $< \varphi$ (włączając 0), uporządkowanych według wielkości.

Elementy zbioru dobrze uporządkowanego typu φ mogą więc być oznaczane zapomocą symboli a_ψ, gdzie wskaźnikami $\psi = \psi(a)$ są liczby porządkowe $< \varphi$ (włączając 0, które jest wskaźnikiem dla elementu pierwszego, a_0). Więc np. elementy zbioru skończonego, złożonego z n elementów, będą oznaczane przez

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1};$$

elementy zbioru typu ω — przez

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots;$$

elementy zbioru typu $\omega + n$ (gdzie n jest liczbą naturalną) — przez

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_{\omega+n-1};$$

elementy zbioru typu $\omega . 2 + 1$ — przez

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \ldots, a_{\omega . 2}$$

i t. p. Ogólnie, elementy zbioru dobrze uporządkowanego typu φ będzie można ustawić w ciąg pozaskończony typu φ:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\omega, \ldots, a_\xi, \ldots \quad (\xi < \varphi).$$

§ **77.** Niech teraz Z oznacza jakikolwiek dany zbiór różnych liczb porządkowych. Niech φ będzie jakąkolwiek liczbą zbioru Z. Zbiór wszystkich liczb porządkowych $< \varphi$ jest dobrze uporządkowany (typu φ, jak dowiedliśmy w § 76): wynika stąd natychmiast, że zbiór wszystkich liczb porządkowych $\psi \leqslant \varphi$ jest również dobrze uporządkowany (typu $\varphi + 1$). W zbiorze tym istnieje więc najmniejsza liczba, należąca do Z (gdyż φ należy do Z): oznaczmy ją przez σ. Łatwo widzieć, że żadna liczba porządkowa $< \sigma$ nie należy do Z, (gdyż liczba taka byłaby $\leqslant \varphi$, co byłoby sprzeczne z definicją liczby σ). Wynika stąd, że każda, należąca do Z liczba porządkowa, jest $\geqslant \sigma$. Liczba σ jest więc najmniejszą liczbą zbioru Z. Dowiedliśmy zatem, że *w każdym zbiorze liczb porządkowych istnieje liczba najmniejsza.* Wynika stąd też natychmiast, że *każdy zbiór liczb porządkowych, jest dobrze uporządkowany* (według wielkości).

Niech D będzie jakimkolwiek danym zbiorem dobrze uporządkowanym liczb porządkowych (wśród których mogą być i równe). Oznaczmy przez σ sumę wszystkich liczb porządkowych, tworzących zbiór D (§ 70): powiadam, że σ będzie liczbą porządkową.

Niech ψ oznacza typ zbioru D: liczby porządkowe, tworzące zbiór D możemy więc oznaczać (§ 76): φ_0, φ_1 i t. d., ogólnie φ_ξ, gdzie ξ jest liczbą porządkową $< \psi$. Niech D_ξ oznacza zbiór typu φ_ξ: możemy przytem przypuszczać, że $D_\xi . D_\eta = 0$ dla $\xi \neq \eta$. Oznaczmy przez S sumę wszystkich zbiorów D_ξ dla $\xi < \psi$ i uporządkujmy zbiór S w ten sposób, że dla każdych dwuch elementów zbioru S, należących do tego samego składnika D_ξ sumy S, pozostawimy ten sam stosunek porządkowy, w jakim były do siebie w zbiorze D_ξ, zaś z dwuch ele-

mentów, należących do różnych składników D_ξ, będziemy uważali ten jako wcześniejszy, który należy do składnika o mniejszym wskaźniku ξ. Z definicji sumy typów, podanej w § 70, wynika, że typem uporządkowanego w ten sposób zbioru S będzie σ. Aby więc dowieść, że σ jest liczbą porządkową, wystarczy okazać, że zbiór S jest dobrze uporządkowany.

Niech więc C oznacza jakąkolwiek daną część nie pustą zbioru S. Wobec $S \supset C \neq 0$, istnieją wskaźniki $\xi < \varphi$, takie iż $D_\xi . C \neq 0$, a wśród nich jeden najmniejszy α (gdyż zbiór ich, jako zbiór liczb porządkowych, jest dobrze uporządkowany).

Mamy więc $D_\alpha C \neq 0$: zbiór $D_\alpha C$, jako część nie pusta zbioru dobrze uporządkowanego D_α, posiada element pierwszy a. Łatwo widzieć, że a jest zarazem pierwszym elementem części C zbioru S. Każda więc część nie pusta zbioru S posiada element pierwszy, czyli zbiór S jest dobrze uporządkowany, c. b. d. o.

Dowiedliśmy więc, że *suma każdego zbioru dobrze uporządkowanego liczb porządkowych jest liczbą porządkową.*

Z twierdzenia (udowodnionego przy końcu § 75), że część zbioru dobrze uporządkowanego jest podobna albo całemu zbiorowi, albo jego odcinkowi, wynika natychmiast, że *suma dowolnego zbioru dobrze uporządkowanego liczb porządkowych nie jest mniejszą od żadnego ze składników.*

ROZDZIAŁ X.

Arytmetyka liczb porządkowych.

§ **78.** Wyprowadzimy kilka twierdzeń o sumie dwuch liczb porządkowych.

Tw. 1. Dla $\beta > 0$ *mamy zawsze* $\alpha + \beta > \alpha$.

W samej rzeczy, niech A i B będą zbiory typów odpowiednio α i β, przyczem $A.B = 0$. Kładąc $S = A + B$ i uważając w sumie S każdy element zbioru A jako wcześniejszy od każdego elementu zbioru B, z pozostawieniem dawnego uporządkowania elementów w każdym ze zbiorów A i B, będziemy mieli oczywiście $\bar{S} = \alpha + \beta$. Z drugiej strony mamy $\alpha = \bar{A}$, zaś zbiór A jest odcinkiem zbioru $S = A + B$ (utworzonym przez pierwszy element składnika B): mamy więc $\alpha < \alpha + \beta$, c. b. d. o.

Suma dwuch liczb porządkowych jest więc zawsze większą od pierwszego składnika. Niekoniecznie jest ona jednak większą od drugiego składnika, bo np. $1 + \omega = \omega$. Zachodzi natomiast

Tw. 2. Dla każdych dwuch liczb porządkowych α i β *mamy:* $\alpha + \beta \geqslant \beta$.

Wynika to natychmiast z twierdzenia, że część zbioru dobrze uporządkowanego jest podobna albo całemu zbiorowi, albo jego odcinkowi (§ 75) (Porówn. § 76).

W szczególności, z tw. 1 wynika dla każdej liczby porządkowej α nierówność

$$\alpha + 1 > \alpha.$$

Łatwo widzieć, że między liczbami α i $\alpha + 1$ niema żadnej pośredniej. W samej rzeczy, niech A oznacza zbiór dobrze uporządko-

wany typu α. Liczba $\alpha+1$ odpowiada więc zbiorowi A', otrzymanemu przez dołączenie do zbioru A jednego nowego elementu a, który należy uważać jako późniejszy od wszystkich elementów zbioru A. Jasnem jest, że zbiór A możemy uważać, jako odcinek zbioru A', utworzony przez element a.

Niech teraz φ oznacza jakąkolwiek liczbę porządkową $<\alpha+1$. Zbiór F typu φ jest więc podobny odcinkowi zbioru A', np. odcinkowi, utworzonemu przez element a' tego zbioru. Ponieważ a jest ostatnim elementem zbioru A', więc musi być albo $a'=a$, albo też $a'<a$. W pierwszym przypadku będzie oczywiście $\varphi=\alpha$, w drugim $\varphi<\alpha$. Dowiedliśmy więc, że nierówność $\varphi<\alpha+1$ pociąga za sobą zawsze nierówność $\varphi\leq\alpha$: niema więc liczby pośredniej między α i $\alpha+1$, c. b. d. o.

Każda więc liczba porządkowa posiada swoją *następną*: mianowicie liczba α — liczbę $\alpha+1$.

Nie każda jednak liczba porządkowa jest następną dla pewnej innej, czyli nie każda posiada swą poprzedzającą: np. liczba ω jej nie posiada. Liczby porządkowe, posiadające swe poprzedzające, nazywamy *liczbami pierwszego rodzaju* [1]), nie posiadające zaś swych poprzedzających — *liczbami drugiego rodzaju*. Więc np. 3, $\omega+1$ — będą to liczby 1-go rodzaju, zaś ω, $\omega+\omega$, $\omega\,.\,\omega$, są liczbami 2-go rodzaju.

Tw. 3. Jeżeli $\alpha>\beta$, to istnieje jedna i tylko jedna liczba porządkowa $\gamma>0$, taka iż $\alpha=\beta+\gamma$.

D o w ó d. Niech A oznacza zbiór typu α. Liczba $\beta<\alpha$ wyznacza pewien odcinek B zbioru A: niech b oznacza element zbioru A, tworzący odcinek B. Oznaczmy przez C zbiór, utworzony ze wszystkich tych elementów zbioru A, ktore nie są wcześniejsze od b, i niech γ będzie typem zbioru C: będzie γ oczywiście >0, gdyż zbiór C nie jest pusty. Z definicji sumy liczb porządkowych wynika, że będzie $\alpha=\beta+\gamma$.

Przypuśćmy teraz, że mamy jednocześnie

$$\alpha=\beta+\gamma \quad \text{oraz} \quad \alpha=\beta+\gamma_1, \qquad (1)$$

gdzie $\gamma\neq\gamma_1$, np. $\gamma>\gamma_1$. Istnieje więc, jak dowiedliśmy przed chwilą, conajmniej jedna liczba porządkowa $\delta>0$, taka iż $\gamma=\gamma_1+\delta$,

---

[1]) Jeżeli α jest liczbą pierwszego rodzaju, to liczbę, poprzedzającą α oznaczamy przez $\alpha-1$: jest to, jak łatwo widzieć, jedyne rozwiązanie równania $\xi+1=\alpha$. (Dla liczb α drugiego rodzaju równanie to oczywiście nie posiada rozwiązań w liczbach porządkowych ξ).

skąd, w myśl (1) i wobec łączności dodawania:

$$\alpha = \beta + \gamma = \beta + (\gamma_1 + \delta) = (\beta + \gamma_1) + \delta = \alpha + \delta,$$

co niemożliwe, gdyż, w myśl tw. 1, mamy $\alpha + \delta > \alpha$.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 3. Jako łatwy wniosek stąd otrzymujemy:

Wniosek: Jeżeli dla liczb porządkowych β, γ i γ_1 zachodzi równość

$$\beta + \gamma = \beta + \gamma_1,$$

to musi być $\gamma = \gamma_1$.

Z twierdzeń 1, 2 i 3 wnosimy też z łatwością, że nierówności $\alpha \geqslant \beta$ oraz $\gamma \geqslant \delta$ pociągają za sobą zawsze nierówność $\alpha + \gamma \geqslant \beta + \delta$, zaś nierówności $\alpha \geqslant \beta$, $\gamma > \delta$, dają nierówność $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. (Natomiast z $\alpha > \beta$, $\gamma \geqslant \delta$ można tylko wnioskować, że $\alpha + \gamma \geqslant \beta + \delta$, gdyż np. $2 + \omega = 1 + \omega$).

§ **79.** Nazywamy *resztą* liczby porządkowej α każdą liczbę porządkową $\rho > 0$, dla której istnieje liczba $\xi \geqslant 0$, taka iż

$$\alpha = \xi + \rho; \tag{1}$$

liczbę ξ nazywamy *odcinkiem* liczby α, odpowiadającym reszcie ρ. (Przy danem α i ρ może istnieć więcej niż jedna liczba ξ, spełniająca równanie (1): odcinek nie jest więc wyznaczony jednoznacznie przez liczbę i jej resztę. W myśl tw. 2 z § 78 mamy $\rho \leqslant \alpha$: reszty są więc nie większe od samej liczby.

Twierdzenie: Każda liczba porządkowa posiada skończoną liczbę różnych reszt.

Dowód. Załóżmy, że ρ i ρ_1 są dwie różne reszty liczby α i że np. $\rho > \rho_1$. Będzie więc przy pewnych ξ i ξ_1

$$\alpha = \xi + \rho \quad \text{oraz} \quad \alpha = \xi_1 + \rho_1,$$

skąd

$$\xi + \rho = \xi_1 + \rho_1. \tag{2}$$

Powiadam, że $\xi < \xi_1$. W samej rzeczy, gdyby było $\xi \geqslant \xi_1$, to moglibyśmy położyć, w myśl tw. 3 z § 78: $\xi = \xi_1 + \delta$, gdzie $\delta \geqslant 0$, i mielibyśmy, w myśl (2):

$$\xi_1 + \delta + \rho = \xi_1 + \rho_1$$

skąd, w myśl wniosku z tw. 3 § 78:

$$\delta + \rho = \rho_1,$$

zatem, w myśl tw. 2 z § 78: $\rho_1 \geqslant \rho$, wbrew założeniu.

Dowiedliśmy więc, że większej reszcie odpowiada zawsze mniejszy odcinek.

Zbiór wszystkich różnych reszt danej liczby porządkowej α jest oczywiście zbiorem dobrze uporządkowanym (jako zbiór różnych liczb porządkowych, § 77): istnieje więc reszta najmniejsza ρ_1. Jeżeli $\rho_1 < \alpha$, to weźmy pod rozwagę zbiór wszystkich tych reszt liczby α, które są $> \rho_1$ (zbiór ten nie będzie pusty, gdyż należy do niego w każdym razie sama liczba α, która jest własną resztą); niech ρ_2 oznacza najmniejszą liczbę tego zbioru. Jeżeli $\rho_2 < \alpha$, to możemy wyznaczyć nową resztę $\rho_3 > \rho_2$ i t. d.

Ciągowi rosnącemu reszt $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots.$ odpowiada, jak dowiedliśmy, ciąg malejący odpowiednich odcinków[1]) $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \ldots.$, a że ciąg ten, jako ciąg malejący liczb porządkowych, nie może być nieskończonym, więc i ciąg reszt musi być skończonym, c. b. d. o.

Niech ρ oznacza najmniejszą resztę liczby α: powiadam, że liczby ρ nie można rozbić na sumę dwuch liczb porządkowych, z których każda byłaby mniejszą od ρ. W samej rzeczy, gdybyśmy założyli, że

$$\rho = \mu + \nu, \qquad (3)$$

gdzie $\mu < \rho$ i $\nu < \rho$, to, w myśl (1), byłoby

$$\alpha = (\xi + \mu) + \nu$$

i przeto liczba ν, która jest oczywiście > 0 (gdyż w razie $\nu = 0$ równość (3) dałaby $\rho = \mu$, wbrew nierówności $\mu < \rho$), byłaby resztą liczby α, mniejszą od ρ, wbrew definicji liczby ρ.

Okażemy jeszcze, że *jeżeli ρ i $\rho_1 > \rho$ są dwie różne reszty tej samej liczby α, to ρ jest resztą dla ρ_1*. W samej rzeczy, oznaczając przez ξ oraz ξ_1 odcinki, odpowiadające resztom ρ i ρ_1, będziemy mieli

$$\alpha = \xi + \rho = \xi_1 + \rho_1, \qquad (4)$$

przyczem $\xi > \xi_1$ (gdyż większej reszcie odpowiada, jak dowiedliśmy wyżej, mniejszy odcinek). W myśl tw. 3 z § 78 możemy więc położyć $\xi = \xi_1 + \delta$ i wzór (4) daje:

$$\xi_1 + \delta + \rho = \xi_1 + \rho_1,$$

[1]) Każdej reszcie ρ możemy np. przyporządkować najmniejszy odpowiedni odcinek, t. j. najmniejszą liczbę ξ, spełniającą równanie (1).

skąd (wniosek z tw. 3 z § 78) wynika, że

$$\delta + \rho = \rho_1,$$

co dowodzi, że ρ jest resztą liczby ρ_1, c. b. d. o.

W szczególności wynika stąd, że najmniejsza reszta każdej danej liczby porządkowej jest resztą każdej innej reszty tejże liczby.

§ **80.** *Składnikiem pierwszym*, albo *liczbą główną dodawania* nazywamy każdą liczbę porządkową > 0, która nie jest sumą dwuch liczb porządkowych od niej mniejszych. Jeżeli więc α jest składnikiem pierwszym, to nie istnieje żaden rozkład

$$\alpha = \beta + \gamma, \text{ gdzie } \beta < \alpha \text{ oraz } \gamma < \alpha.$$

Wśród liczb porządkowych skończonych oczywiście tylko liczba 1 jest składnikiem pierwszym. Liczba ω jest składnikiem pierwszym, gdyż każda liczba porządkowa $< \omega$, a przeto i suma każdych dwuch takich liczb, jest skończoną. Liczby $\omega + 1$, $\omega + \omega$ oczywiście nie są składnikami pierwszymi.

W § 79 dowiedliśmy, że *najmniejsza reszta każdej liczby porządkowej jest składnikiem pierwszym.* (Jest to twierdzenie analogiczne do twierdzenia arytmetyki, że najmniejszy > 1 dzielnik każdej liczby naturalnej jest jej czynnikiem pierwszym).

Jeżeli α jest składnikiem pierwszym i $\alpha = \beta + \gamma$, to nie może być $0 < \gamma < \alpha$, gdyż, w myśl tw. 1 z § 78, mielibyśmy wówczas również $\beta < \alpha$, wbrew własności liczby α; ponieważ zaś, z drugiej strony, wobec $\alpha = \beta + \gamma$ i tw. 2 z § 78, wynika $\gamma \leqslant \alpha$, więc musi być $\gamma = 0$ lub $\gamma = \alpha$. Wynika stąd, że *składnik pierwszy nie posiada żadnej, różnej od niego samego, reszty.*

Łatwo też widzieć, że *z pośród reszt danej liczby tylko najmniejsza jest składnikiem pierwszym:* wynika to natychmiast z uwagi, że, jak dowiedliśmy w § 79, najmniejsza reszta każdej liczby jest resztą każdej innej reszty tejże liczby.

Twierdzenie: Jeżeli ρ jest składnikiem pierwszym, zaś $\xi < \rho$, to

$$\xi + \rho = \rho. \tag{1}$$

Dowód. Wobec $\rho > \xi$ oraz tw. 3 z § 78 istnieje takie $\gamma > 0$, iż

$$\rho = \xi + \gamma. \tag{2}$$

Gdyby było $\gamma < \rho$, to liczba ρ, w myśl (2), byłaby sumą dwuch mniejszych od niej liczb porządkowych, wbrew założeniu, że jest

składnikiem pierwszym. Z drugiej strony, wobec (2) i w myśl tw. 2 z § 78, jest $\gamma \leqq \rho$: musi więc być $\gamma = \rho$, zatem wzór (2) daje wzór (1), c. b. d. o.

Dowiedzioną własność składników pierwszych możemy jeszcze tak wyrazić: *składnik pierwszy pochłania każdy stojący przed nim i mniejszy od niego składnik.*

§ **81.** Niech α oznacza daną liczbę porządkową > 0; oznaczmy przez ρ' najmniejszą jej resztę, zaś przez α' najmniejszy, odpowiadający tej reszcie odcinek i przypuśćmy, że $\alpha' > 0$. Oznaczmy dalej przez ρ'' najmniejszą resztę liczby α', zaś przez α'' najmniejszy, odpowiadający tej reszcie odcinek. Będzie więc

$$\alpha = \alpha' + \rho', \tag{3}$$

$$\alpha' = \alpha'' + \rho'', \tag{4}$$

skąd

$$\alpha = \alpha'' + \rho'' + \rho'. \tag{5}$$

Gdyby było $\rho'' < \rho'$, to, z uwagi, że ρ', jako najmniejsza reszta liczby α, jest składnikiem pierwszym i przeto pochłania stojący przed nią mniejszy składnik, mielibyśmy $\rho'' + \rho' = \rho'$, zatem, wobec (5):

$$\alpha = \alpha'' + \rho'. \tag{6}$$

Wzór (4) wskazuje, w myśl tw. 4 z § 78, że $\alpha' > \alpha''$: liczba α'' byłaby więc, wobec (6), mniejszym od α' odcinkiem, odpowiadającym reszcie ρ' liczby α, wbrew definicji liczby α'. Dowiedliśmy więc, że musi być $\rho'' \geqq \rho'$.

Gdyby było $\alpha'' > 0$, to moglibyśmy, oznaczając przez ρ''' najmniejszą resztę liczby α'', zaś przez α''' najmniejszy odpowiadający tej reszcie odcinek, położyć

$$\alpha'' = \alpha''' + \rho''', \tag{7}$$

przyczem znowu byłoby $\alpha''' < \alpha''$ oraz $\rho''' \geqq \rho''$.

Ciąg otrzymywanych w ten sposób równości nie może być nieskończonym, gdyż liczby α', α'', α''', ... stale maleją. Dojdziemy więc do równości

$$\alpha^{(n-1)} = \alpha^{(n)} + \rho^{(n)}, \tag{8}$$

gdzie będzie $\alpha^{(n)} = 0$. Z kolejnych równości (3), (4), (7), ..., (8), znajdujemy w jednej chwili

$$\alpha = \rho^{(n)} + \rho^{(n-1)} + \ldots \rho'' + \rho'.$$

Dowiedliśmy więc, że każda liczba porządkowa > 0 jest sumą skończonej ($\geqslant 1$) liczby składników pierwszych nie rosnących. Okażemy obecnie, że taki rozkład jest zawsze tylko jeden.

Niech

$$\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n \tag{9}$$

będzie rozkładem liczby porządkowej α na składniki pierwsze nie rosnące.

Udowodnimy przedewszystkiem, że pierwszy składnik ρ_1 rozwinięcia (9) jest największym składnikiem pierwszym $\leqslant \alpha$.

Załóżmy, dla dowodu, że istnieje składnik pierwszy $\rho \leqslant \alpha$, większy od ρ_1. Wobec $\rho_1 < \rho$ i własności składników pierwszych, że pochłaniają składniki mniejsze, przed nimi stojące (§ 80), znaleźlibyśmy z łatwością: $\rho = \rho_1 + \rho = \underbrace{\rho_1}_{1} + \underbrace{\rho_1}_{2} + \ldots + \underbrace{\rho_1}_{n} + \rho > \underbrace{\rho_1}_{1} + \underbrace{\rho_1}_{2} + \ldots + \underbrace{\rho_1}_{n}$, skąd, wobec (9) i uwagi, że $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$, otrzymalibyśmy $\rho > \alpha$, wbrew założeniu, że $\rho \leqslant \alpha$. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie: Jeżeli liczba porządkowa α jest sumą skończonej liczby składników pierwszych nie rosnących $\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n$, to ρ_1 jest największym składnikiem pierwszym $\leqslant \alpha$.

Z twierdzenia tego wynika natychmiast, że w zbiorze składników pierwszych, nie większych od dowolnej danej liczby porządkowej α, istnieje zawsze składnik pierwszy największy. Wynika stąd, dalej, natychmiast

Twierdzenie: Jeżeli w zbiorze Z składników pierwszych niema liczby największej, to pierwsza liczba porządkowa α, większa od każdej z liczb zbioru Z, jest składnikiem pierwszym.

W samej rzeczy, gdyby α nie było składnikiem pierwszym, to w zbiorze składników pierwszych $\leqslant \alpha$ (identycznym w tym przypadku ze zbiorem Z) nie byłoby liczby największej, wbrew dowiedzionemu wyżej.

Niech teraz wzór (9) oznacza jakikolwiek rozkład liczby porządkowej α na szereg skończony składników pierwszych nie rosnących. Liczba ρ_1 jest więc, jak dowiedliśmy, największym składnikiem pierwszym $\leqslant \alpha$, i przeto jest przez liczbę α wyznaczoną w zupełności.

Jeżeli szereg (9) zawiera więcej niż jeden składnik, to mamy $\alpha > \rho_1$ i, w myśl tw. 3 z § 78, istnieje jedna i tylko jedna liczba α_1, spełniająca warunek

$$\alpha = \rho_1 + \alpha_1,$$

a że, wobec (9), liczbą taką jest $\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n$, więc mamy

$$\alpha_1 = \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n. \tag{10}$$

Ze wzoru (10), który daje rozkład liczby α_1 na skończony szereg składników pierwszych nie rosnących, wnosimy podobnież, że liczba ρ_2 jest największym składnikiem pierwszym $\leqslant \alpha_1$: i liczba ρ_2 jest więc przez liczbę α wyznaczona w zupełności. Jeżeli $n > 1$, to, kładąc, dalej, $\alpha_1 = \rho_2 + \alpha_2$, znajdziemy $\alpha_2 = \rho_3 + \ldots + \rho_n$ i liczba ρ_3 będzie największym składnikiem pierwszym $\leqslant \alpha_2$ i t. d.

Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że wszystkie składniki szeregu (9) są przez liczbę α wyznaczone w zupełności.

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie: Każda liczba porządkowa > 0 daje się i to w jeden tylko sposób przedstawić jako suma skończonej liczby składników pierwszych, nie rosnących.

Wyprowadzimy jeszcze pewną własność rozwinięcia (9).

Lemmat. Jeżeli $\alpha = \rho + \delta$, gdzie ρ jest składnikiem pierwszym, i jeżeli τ jest resztą liczby α, mniejszą od α, to $\tau \leqslant \delta$.

Dowód. Gdyby było $\tau > \delta$, to, w myśl znanej własności odcinków, odcinek ρ, odpowiadający reszcie δ, byłby większy od odcinka ξ, odpowiadającego reszcie τ: byłoby więc

$$\rho = \xi + \gamma, \quad \text{gdzie} \quad \gamma > 0,$$

skąd (z uwagi, że składnik pierwszy nie posiada różnej od siebie reszty) mielibyśmy $\gamma = \rho$, zatem $\rho = \xi + \rho$, co, wobec wzoru $\alpha = \xi + \tau$, daje

$$\xi + \rho + \delta = \xi + \tau,$$

skąd (w myśl wniosku z tw. 3, § 78): $\tau = \rho + \delta = \alpha$, wbrew założeniu, że $\tau < \alpha$. Dowiedliśmy więc naszego lemmatu.

Z dowiedzionego lemmatu wynika natychmiast, że jeżeli $\alpha = \rho + \delta$ ($\delta > 0$), gdzie ρ jest składnikiem pierwszym, to niema żadnej reszty liczby α, pośredniej między α i δ: jeżeli nadto $\delta < \alpha$, to δ jest największą, mniejszą od α, resztą liczby α.

W szczególności, weźmy znowu pod rozwagę rozkład (9) liczby α na składniki pierwsze nie rosnące. Połóżmy

$$\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_n = \alpha_1: \tag{11}$$

będzie

$$\alpha = \rho_1 + \alpha_1, \tag{12}$$

co daje, jak wiemy $\alpha \geqslant \alpha_1$. Gdyby było $\alpha = \alpha_1$, wzór (12) dałby $\alpha = \rho_1 + \alpha = \rho_1 + \rho_1 + \alpha = \ldots = \underbrace{\rho_1}_{1} + \underbrace{\rho_1}_{2} + \ldots + \underbrace{\rho_1}_{n} + \alpha$, skąd $\alpha > \underbrace{\rho_1}_{1} + \underbrace{\rho_1}_{2} + \ldots + \underbrace{\rho_1}_{n}$, zatem, wobec $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$, oraz wobec (9), $\alpha > \alpha$, co niemożliwe.

Jest więc $\alpha_1 < \alpha$ i przeto wzór (12) dowodzi, w myśl naszego lemmatu, że α_1, czyli liczba (11), jest największą, mniejszą od α, resztą liczby α.

Każda reszta liczby α, mniejsza od reszty α_1, musi, jak wiemy, być resztą liczby α_1 (§ 79). Kładąc

$$\rho_3 + \rho_4 + \ldots + \rho_n = \alpha_2,$$

i rozumując, jak wyżej, znaleźlibyśmy $\alpha_2 < \alpha_1$ i okazalibyśmy, że α_2 jest największą, mniejszą od α_1 resztą liczby α_1, a więc też największą, mniejszą od α_1 resztą liczby α.

Rozumując w podobny sposób dalej, dochodzimy ostatecznie do wniosku, że *wszystkiemi różnemi resztami liczby α, uporządkowanemi według wielkości malejących, są liczby*

$$\rho_k + \rho_{k+1} + \ldots + \rho_n, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

czyli reszty cząstkowe rozwinięcia (9).

§ **82.** Niech Z oznacza dany zbiór dobrze uporządkowany typu α, którego elementami są liczby porządkowe. Jak widzieliśmy w § 76, elementy zbioru Z możemy oznaczać zapomocą symboli φ_ξ, gdzie ξ jest jakąkolwiek liczbą porządkową $< \alpha$, włączając 0. Inaczej mówiąc, liczby, tworzące zbiór Z, możemy ustawić *w ciąg pozaskończony* typu α:

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\omega, \varphi_{\omega+1}, \ldots, \varphi_\xi, \ldots \quad (\xi < \alpha). \tag{1}$$

Ciąg (1) będziemy oznaczali krócej przez $\{\varphi_\xi\}_{\xi < \alpha}$.

Jeżeli dla $\xi < \eta < \alpha$ mamy stale $\varphi_\xi < \varphi_\eta$, to ciąg (1) nazywamy *rosnącym*.

Jak dowiedliśmy w § 76, każdy zbiór dobrze uporządkowany liczb porządkowych daje oznaczoną w zupełności sumę, która jest liczbą porządkową, nie mniejszą od żadnego ze składników, a więc, zwiększona o 1, będzie większą od każdego ze składników. Istnieją więc liczby porządkowe, większe od każdego z wyrazów ciągu (1), a wśród nich istnieje najmniejsza (§ 77) [1]: oznaczmy ją przez λ. Przypuśćmy, dalej, że typ α ciągu (1) jest liczbą drugiego rodzaju (t. j. że ciąg (1) nie posiada wyrazu ostatniego), i niech μ oznacza jakąkolwiek liczbę porządkową $< \lambda$. Z definicji liczby λ (jako najmniejszej liczby porządkowej, większej od każdej z liczb ciągu (1)) wynika, że liczba μ

[1]) Jeżeli σ jest sumą wszystkich liczb ciągu (1), to najmniejsza z pośród liczb porządkowych $\leqslant \sigma + 1$ i większych od każdego z wyrazów ciągu (1), będzie oczywiście najmniejszą liczbą porządkową, większą od każdej z liczb (1).

nie może być większa od każdej z liczb (1): istnieje więc taki wskaźnik ν, będący liczbą porządkową $< \alpha$, zależną od μ, iż $\mu < \varphi_\nu$: będzie więc (z uwagi, że ciąg (1) jest rosnący):

$$\mu < \varphi_\xi < \lambda, \quad \text{dla} \quad \nu < \xi < \alpha. \tag{2}$$

Innemi słowy: dla każdej danej liczby $\mu < \lambda$ wszystkie wyrazy ciągu (1), poczynając od pewnego miejsca, są zawarte między μ i λ. Liczba λ posiada więc własność, analogiczną do własności granicy ciągu rosnącego liczb rzeczywistych. Naturalnem więc będzie liczbę λ nazywać *granicą ciągu pozaskończonego* (1), pisząc

$$\lambda = \lim_{\xi < \alpha} \varphi_\xi . \tag{3}$$

Więc np. mamy:

$$\omega = \lim_{n < \omega} n = \lim_{n < \omega} n^2 = \lim_{n < \omega} 2^n;$$

ogólnie mamy, dla każdej liczby porządkowej α drugiego rodzaju:

$$\alpha = \lim_{\xi < \alpha} \xi,$$

t. j. każda liczba porządkowa 2-go rodzaju jest granicą zbioru wszystkich liczb porządkowych od niej mniejszych.

Pomimo zaznaczonej wyżej analogji między granicą ciągu liczb rzeczywistych, a granicą ciągu liczb porządkowych, istnieje jednak i pewna różnica, zauważona przez A. Hoborskiego[1]. Jeżeli liczba rzeczywista l jest granicą ciągu u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, to, kładąc $l = u_n + r_n$, będziemy mieli $\lim_{n = \infty} r_n = 0$. Natomiast, jeżeli liczba porządkowa λ jest granicą ciągu rosnącego (1), i jeżeli położymy $\lambda = \varphi_\xi + \rho_\xi$, to, poczynając od pewnego miejsca, wyrazy ρ_ξ będą stale równe pewnej liczbie porządkowej dodatniej, mianowicie najmniejszej reszcie ρ liczby λ.

W samej rzeczy, połóżmy

$$\lambda = \varphi_\xi + \rho_\xi , \quad \text{dla} \quad \xi < \alpha : \tag{4}$$

wobec $\lambda > \varphi_\xi$ dla $\xi < \alpha$, liczby ρ_ξ będą wszystkie dodatnie i jednoznacznie wyznaczone przez liczby λ i ξ (§ 78, tw. 3).

---

[1]) *Fund. Math.* t. II, str. 193.

Niech ρ oznacza najmniejszą resztę liczby λ (§ 79): możemy więc położyć

$$\lambda = \mu + \rho, \tag{5}$$

gdzie $\mu > 0$. Wobec (5), będzie (§ 78, tw. 1) $\lambda > \mu$: wobec (3) istnieje więc liczba μ, dla której zachodzi wzór (2).

Wobec (2) możemy położyć

$$\varphi_\xi = \mu + \tau_\xi, \quad \text{dla} \quad \nu < \xi < \alpha, \tag{6}$$

gdzie $\tau_\xi > 0$. Wzory (4) i (6) dają:

$$\lambda = \mu + \tau_\xi + \rho_\xi, \quad \text{dla} \quad \nu < \xi < \alpha,$$

skąd, wobec (5): $\mu + \rho = \mu + \tau_\xi + \rho_\xi$, co daje (§ 78):

$$\rho = \tau_\xi + \rho_\xi, \quad \text{dla} \quad \nu < \xi < \alpha,$$

zatem, z uwagi że $\rho_\xi > 0$ dla $\xi < \alpha$, i że ρ jest najmniejszą resztą liczby λ, a więc nie posiada mniejszej od siebie reszty:

$$\rho_\xi = \rho, \quad \text{dla} \quad \nu < \xi < \alpha,$$

c. b. d. o.

§ **83.** Niech teraz σ oznacza sumę wszystkich liczb porządkowych, tworzących ciąg pozaskończony $\{\varphi_\xi\}_{\xi<\alpha}$ typu α (niekoniecznie rosnący). Będziemy pisali

$$\sigma = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\omega + \varphi_{\omega+1} + \ldots + \varphi_\xi + \ldots \; (\xi<\alpha), \tag{1}$$

lub, krócej

$$\sigma = \sum_{\xi<\alpha} \varphi_\xi . \tag{2}$$

Połóżmy:

$$\sigma_\nu = \sum_{\xi<\nu} \varphi_\xi, \quad \text{dla} \quad \nu < \alpha, \tag{3}$$

będą to *sumy cząstkowe* szeregu (1). Więc np. $\sigma_n = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}$ (dla n naturalnych), $\sigma_\omega = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$, $\sigma_{\omega+1} = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_\omega$ i t. d.

Jasnem jest, że będzie stale $\sigma_\mu \leqslant \sigma_\nu$ dla $\mu < \nu < \alpha$: nadto, jeżeli wszystkie składniki szeregu (1) są dodatnie, to ciąg sum cząstkowych σ_ξ ($\xi < \alpha$) będzie, jak łatwo widzieć, rosnący (gdyż, dla $\mu < \nu$, będzie $\mu + 1 \leqslant \nu$, zatem: $\sigma_\mu < \sigma_\mu + \varphi_\mu = \sigma_{\mu+1} \leqslant \sigma_\nu$).

Podobnie, jak dla szeregów liczb rzeczywistych, *suma szeregu pozaskończonego liczb porządkowych dodatnich jest granicą ciągu sum cząstkowych*, mianowicie, jeżeli α jest liczbą 2-go rodzaju, to mamy wzór

$$\sigma = \lim_{\xi < \alpha} \sigma_\xi . \quad (4)$$

Dla dowodu wzoru (4) musimy okazać, że σ jest najmniejszą liczbą porządkową, większą od każdej z liczb (3). Jasnem jest, że $\sigma \geqslant \sigma_\xi$, dla $\xi < \alpha$, zatem też $\sigma \geqslant \sigma_{\xi+1} = \sigma_\xi + \varphi_\xi > \sigma_\xi$, dla $\xi < \alpha$. Wystarczy więc jeszcze okazać, że żadna liczba $\tau < \sigma$ nie może być $> \sigma_\xi$, dla $\xi < \alpha$. Przypuśćmy więc, że mamy $\tau < \sigma$ i przypomnijmy sobie definicję sumy zbioru liczb porządkowych (§ 77). Niech D_ξ ($\xi < \alpha$) oznacza zbiór typu φ_ξ, załóżmy, że $D_\xi D_\eta = 0$, dla $\xi \neq \eta$ i uporządkujmy zbiór $S = \sum_{\xi<\alpha} D_\xi$, jak w § 77: będzie to więc zbiór typu σ. Wobec $\tau < \sigma$ będzie istniał odcinek zbioru S, typu τ: niech a oznacza element zbioru S, tworzący ten odcinek, zaś D_ν (gdzie $\nu < \alpha$) — ten składnik sumy S, do którego element a należy. Liczba τ będzie oczywiście typem pewnego odcinka sumy $S_{\nu+1} = \sum_{\xi \leqslant \nu} D_\xi$, która jest typu $\sigma_{\nu+1}$: stąd nierówność $\tau < \sigma_{\nu+1}$ (przyczem, wobec $\nu < \alpha$ i uwagi, że α jest liczbą 2-go rodzaju, mamy też $\nu + 1 < \alpha$). Żadna liczba porządkowa $< \sigma$ nie jest więc większą od każdej z sum (3). Udowodniliśmy więc wzór (4).

§ **84.** Udowodnimy, że *iloczyn dwuch liczb porządkowych jest zawsze liczbą porządkową.*

Niech więc α i β będą dwie dane liczby porządkowe > 0 [1]) A i B— dwa zbiory, takie iż $\overline{A} = \alpha$, $\overline{B} = \beta$. Niech P oznacza zbiór wszystkich układów (a, b), gdzie a oznacza jakikolwiek element zbioru A, zaś b— jakikolwiek element zbioru B. Zbiór P uporządkujmy w ten sposób, że $(a, b) \prec (a_1, b_1)$, jeżeli $b \prec b_1$, lub jeżeli $b = b_1$, $a \prec a_1$. W myśl definicji iloczynu typów porządkowych (§ 71), będzie $\overline{P} = \alpha\beta$. Aby więc okazać, że iloczyn $\alpha\beta$ jest liczbą porządkową, musimy dowieść, że zbiór P, uporządkowany w ustalony wyżej sposób, będzie dobrze uporządkowany.

Niech więc C oznacza jakąkolwiek część nie pustą zbioru P. Istnieją więc elementy b zbioru B, takie, iż przy pewnem a, należą-

---

[1]) Iloczyn dwuch liczb porządkowych, z których conajmniej jedna jest zerem, jest równy zeru. Naodwrót: iloczyn dwuch liczb porządkowych tylko wtedy jest zerem, jeżeli conajmniej jeden z czynników jest zerem.

cem do A, układ (a, b) należy do C: niech b_1 oznacza najwcześniejszy z takich elementów b (element taki istnieje, gdyż zbiór B jest dobrze uporządkowany). Istnieją zatem elementy a zbioru A, takie iż układ (a, b_1) należy do C: niech a_1 oznacza najwcześniejszy z takich elementów a. Jasnem jest, że (a_1, b_1) jest pierwszym układem zbioru C. W samej rzeczy, że układ (a_1, b_1) należy do C, wynika bezpośrednio z definicji elementu a_1, z drugiej strony, gdyby układ $(a, b) \prec (a_1, b_1)$ należał do C, musiałoby być albo $b \prec b_1$, wbrew definicji elementu b_1, albo też $b = b_1$, $a \prec a_1$, wbrew definicji elementu a_1.

Dowiedliśmy więc, że każda część nie pusta zbioru P posiada element pierwszy, c. b. d. o.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika natychmiast, że iloczyn dowolnej skończonej liczby liczb porządkowych jest zawsze liczbą porządkową, przyczem z własności ogólnych iloczynu typów porządkowych (§ 71) wynika, że iloczyn liczb porządkowych posiada prawo łączności: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, oraz prawo rozdzielności, w razie gdy suma jest mnożnikiem (drugim czynnikiem): $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ [1]). (Prawo przemienności, jakoteż prawo rozdzielności w drugiej postaci nie zachodzą, bo np. $\omega.2 \neq 2.\omega$, $(1 + 1).\omega \neq 1.\omega + 1.\omega$).

§ **85.** Udowodnimy kilka twierdzeń o iloczynie dwuch liczb porządkowych.

Tw. 1. Dla $\alpha > 0$, $\beta > \beta_1$ *mamy zawsze* $\alpha\beta > \alpha\beta_1$.

Dowód. Wobec $\beta > \beta_1$ i w myśl tw. 3 z § 78, możemy położyć $\beta = \beta_1 + \gamma$, gdzie $\gamma > 0$. Stąd, wobec prawa rozdzielności i tw. 1 z § 78 (z uwagi że wobec $\alpha > 0$ i $\gamma > 0$ mamy $\alpha\gamma > 0$):

$$\alpha\beta = \alpha(\beta_1 + \gamma) = \alpha\beta_1 + \alpha\gamma > \alpha\beta_1, \text{ c. b. d. o.}$$

Tw. 2. Dla $\alpha \geqslant \alpha_1$ *oraz* $\beta \geqslant \beta_1$ *mamy zawsze* $\alpha\beta \geqslant \alpha_1\beta_1$.

Dowód. Z definicji iloczynu typów porządkowych wynika natychmiast, wobec $\alpha \geqslant \alpha_1$ oraz $\beta \geqslant \beta_1$, że $\alpha_1\beta_1$ jest typem części zbioru, będącego typu $\alpha\beta$, skąd, w myśl twierdzenia końcowego z § 75 wynika, że $\alpha_1\beta_1 \leqslant \alpha\beta$, c. b. d. o.

Z twierdzeń 1 i 2 wynika w szczególności (dla $\beta_1 = 1$, względnie $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \beta$), że iloczyn dwuch liczb porządkowych dodatnich jest niemniejszy od każdego z czynników, oraz że, jeżeli drugi czynnik jest > 1, to iloczyn jest większy od pierwszego czynnika.

Tw. 3. Nierówność $\alpha\beta > \alpha\beta_1$ *pociąga za sobą nierówność* $\beta > \beta_1$.

[1]) Prawo to zachodzi dla dowolnej skończonej ilości składników, a także dla szeregu pozaskończonego.

Dowód. Załóżmy, że $\alpha\beta > \alpha\beta_1$: Gdyby było $\beta_1 \geqq \beta$, mielibyśmy, w myśl tw. 2, $\alpha\beta_1 \geqq \alpha\beta$, wbrew założeniu.

Musi więc być $\beta > \beta_1$, c. b. d. o.

Analogicznie dowodzimy

Tw. 3a. Nierówność $\alpha\beta > \alpha_1\beta$ *daje* $\alpha > \alpha_1$.

Tw. 4. Równość $\alpha\beta = \alpha\beta_1$ *pociąga za sobą, dla* $\alpha > 0$, *równość* $\beta = \beta_1$.

Dowód. Gdyby było $\beta > \beta_1$, to, wobec $\alpha > 0$ i w myśl tw. 1, mielibyśmy $\alpha\beta > \alpha\beta_1$, wbrew założeniu. Podobnież dowodzimy, że nie może być $\beta < \beta_1$. Musi więc być $\beta = \beta_1$, c. b. d. o.

Twierdzenie 4 dowodzi, że dzielenie prawostronne[1]), o ile jest wykonalne, daje oznaczony w zupełności iloraz. Inaczej ma się rzecz z dzieleniem lewostronnem, które wogóle nie wyznacza jednoznacznie ilorazu, bo np. $2 . \omega = 3 . \omega = \omega$.

§ **86.** *Twierdzenie. Jeżeli* $\gamma < \alpha\beta$, *to możemy liczbę* γ *w jeden i tylko jeden sposób przedstawić w postaci* $\gamma = \alpha\beta_1 + \alpha_1$, gdzie $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$.

Dowód. Niech A i B będą dwa zbiory, takie iż $A = \alpha$, $B = \beta$ i niech P oznacza zbiór układów (a, b) określony i uporządkowany jak w § 84. Wobec $\gamma < \alpha\beta$, liczba γ będzie typem pewnego odcinka zbioru P, np. odcinka Q utworzonego przez element (a_1, b_1). Zbiór Q składa się więc ze wszystkich układów (a, b) zbioru P, spełniających warunek

$$(a, b) \prec (a_1, b_1).$$

Oznaczmy przez M zbiór wszystkich układów (a, b) zbioru P, spełniających warunek $b \prec b_1$, zaś przez N—zbiór wszystkich układów (a, b) zbioru P, spełniających warunki $a \prec a_1$, $b = b_1$. Oznaczmy, dalej, przez α_1 typ odcinka zbioru A, utworzonego przez element a_1, zaś przez β_1 — typ odcinka zbioru B, utworzonego przez element b_1: będzie więc $\alpha_1 < \alpha$ oraz $\beta_1 < \beta$.

Z definicji iloczynu typów wynika natychmiast, że typem części M zbioru P będzie $\alpha\beta_1$, a że typem części N zbioru P jest oczywiście α_1, więc, w myśl definicji sumy typów, znajdujemy: $\gamma = \alpha\beta_1 + \alpha_1$.

Załóżmy teraz, że liczbę γ przedstawić można w postaci

$$\gamma = \alpha\beta_2 + \alpha_2, \text{ gdzie } \alpha_2 < \alpha, \ \beta_2 < \beta.$$

[1]) Dzieleniem prawostronnem nazywamy znajdywanie, przy danych α i β, liczb ξ, spełniających równanie $\alpha\xi = \beta$. W lewostronnem dzieleniu chodzi o równanie $\xi\alpha = \beta$.

Mielibyśmy więc

$$\alpha\beta_1 + \alpha_1 = \alpha\beta_2 + \alpha_2. \qquad (1)$$

Gdyby było $\beta_1 = \beta_2$, to, w myśl tw. 3 z § 78, znaleźlibyśmy stąd $\alpha_1 = \alpha_2$ i oba rozkłady byłyby identyczne. Załóżmy więc, że $\beta_1 \neq \beta_2$, np. $\beta_1 > \beta_2$. Możemy więc położyć $\beta_1 = \beta_2 + \tau$, gdzie $\tau > 0$, skąd

$$\alpha\beta_1 = \alpha(\beta_2 + \tau) = \alpha\beta_2 + \alpha\tau,$$

zatem, w myśl (1):

$$\alpha\beta_2 + \alpha\tau + \alpha_1 = \alpha\beta_2 + \alpha_2,$$

co daje (§ 78):

$$\alpha\tau + \alpha_1 = \alpha_2. \qquad (2)$$

Lecz, wobec $\tau \geqslant 1$, $\alpha > 0$ (gdyż $\alpha\beta > \gamma$) i w myśl tw. 2 z § 85, mamy $\alpha\tau \geqslant \alpha$: wzór (2) daje więc $\alpha_2 \geqslant \alpha$, wbrew założeniu.

Twierdzenie nasze zostało więc dowiedzione w zupełności.

Twierdzenie: Jeżeli $\alpha > 0$, to liczbę β możemy zawsze i to w jeden tylko sposób przedstawić w postaci

$$\beta = \alpha\xi + \rho, \text{ gdzie } 0 \leqslant \rho < \alpha. \qquad (3)$$

Dowód. Wobec $\alpha > 0$, czyli $\alpha \geqslant 1$, mamy, w myśl tw. 2 z § 85: $\alpha\beta \geqslant \beta$. W razie $\alpha\beta = \beta$, będziemy mogli we wzorze (3) przyjąć $\xi = \beta$, $\rho = 0$.

W razie $\alpha\beta > \beta$ możemy zastosować twierdzenie, udowodnione w pierwszej części tego §, co daje $\beta = \alpha\beta_1 + \alpha_1$, gdzie $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$: wystarczy więc położyć $\xi = \beta_1$, $\rho = \alpha_1$.

Dowód, że liczby ξ i ρ, spełniające wzór (3), są przez α i β wyznaczone w zupełności, przeprowadza się zupełnie tak samo, jak jednoznaczność rozkładu w poprzedniem twierdzeniu.

Twierdzenie nasze możemy więc uważać za dowiedzione w zupełności.

W szczególności, dla $\alpha = 2$, wnosimy, że każda liczba porządkowa daje się przedstawić bądź w postaci 2ξ, bądź w postaci $2\xi + 1$ (a więc jest bądź parzysta, bądź nieparzysta). Dla $\alpha = \omega$ wynika z naszego twierdzenia, że każda liczba porządkowa daje się przedstawić w postaci $\beta = \omega\xi + \rho$, gdzie ρ jest liczbą skończoną ($\geqslant 0$); jeżeli $\rho > 0$, to β jest oczywiście liczbą 1-go rodzaju ($\beta = \omega\xi + (\rho - 1) + 1$): wynika stąd, że każda liczba porządkowa 2-go rodzaju ma postać $\omega\xi$.

Wzór (3) możemy uważać jako uogólnienie znanego wzoru arytmetyki, dającego związek między dzielną, dzielnikiem, ilorazem i resztą.

§ **87.** *Twierdzenie: Jeżeli ρ jest składnikiem pierwszym* > 1, *to przy wszelkiem α liczba $\alpha\rho$ jest składnikiem pierwszym.*

Dowód. Załóżmy, że $\alpha\rho$ nie jest składnikiem pierwszym, że więc

$$\alpha\rho = \beta + \gamma, \tag{1}$$

gdzie $\beta < \alpha\rho$ oraz $\gamma < \alpha\rho$.

W myśl twierdzenia, udowodnionego w § 86, będzie więc

$$\beta = \alpha\xi + \mu, \quad \gamma = \alpha\eta + \nu, \tag{2}$$

gdzie

$$\mu < \alpha, \quad \nu < \alpha \tag{3}$$

oraz

$$\xi < \rho, \quad \eta < \rho. \tag{4}$$

Wobec (2) i (3) mamy więc

$$\beta + \gamma < \alpha\xi + \alpha + \alpha\eta + \alpha = \alpha(\xi + 1 + \eta + 1). \tag{5}$$

Wobec (4), wobec $\rho > 1$, oraz twierdzenia, że składnik pierwszy pochłania każdy mniejszy od niego przed nim stojący składnik, znajdujemy kolejno: $1 + \rho = \rho$, $\eta + 1 + \rho = \eta + \rho = \rho$, wreszcie

$$\xi + 1 + \eta + 1 + \rho = \rho. \tag{6}$$

Gdyby było $\xi + 1 + \eta + 1 \geqslant \rho$, mielibyśmy $\xi + 1 + \eta + 1 + \rho \geqslant$ $\geqslant \rho + \rho > \rho$, wbrew (6). Jest więc

$$\xi + 1 + \eta + 1 < \rho$$

i przeto, w myśl tw. 1 z § 85:

$$\alpha(\xi + 1 + \eta + 1) < \alpha\rho,$$

skąd, wobec (5):

$$\beta + \gamma < \alpha\rho,$$

wbrew (1). Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Wniosek: Jeżeli $\alpha > 0$, to najmniejszym składnikiem pierwszym, większym od α, jest liczba $\alpha\omega$.

Dowód. Liczba ω jest, jak wiemy, składnikiem pierwszym (§ 80): w myśl naszego twierdzenia, liczba $\alpha\omega$ będzie więc składnikiem pierwszym. Wystarczy więc okazać jeszcze, że między α i $\alpha\omega$ niema żadnego składnika pierwszego.

Załóżmy więc, że β jest liczbą, leżącą między α i $\alpha\omega$, t. j. że

$$\alpha < \beta < \alpha\omega. \tag{7}$$

Wobec $\beta < \alpha\omega$ i w myśl tw. z § 86, możemy położyć:

$$\beta = \alpha\mu + \nu, \text{ gdzie } \mu < \omega, \nu < \alpha. \qquad (8)$$

Jeżeli przytem $\nu > 0$, to wobec (8) i w myśl tw. 1 z § 78, mamy $\beta > \alpha\mu$, a że, w myśl (7) i (8), $\beta > \nu$, więc wzór (8) wskazuje, że β jest sumą dwuch liczb mniejszych od β, zatem nie jest składnikiem pierwszym.

Jeżeli zaś $\nu = 0$, to, z uwagi, że, wobec (8), μ jest liczbą skończoną, wzór (8) możemy przepisać w postaci:

$$\beta = \alpha(\mu - 1) + \alpha,$$

skąd znowu, wobec $0 < \alpha < \beta$, wynika, że β nie jest składnikiem pierwszym.

Udowodniliśmy więc nasz wniosek. W szczególności, wynika z niego, że jeżeli ρ jest danym składnikiem pierwszym, to następnym po nim składnikiem pierwszym jest $\rho\omega$. Daje to nam, wraz z twierdzeniem z § 81, sposób wyznaczania kolejnych składników pierwszych. Pierwszymi ω składnikami pierwszymi będą więc liczby

$$1, \omega, \omega\omega, \omega\omega\omega, \ldots;$$

najmniejsza liczba porządkowa, większa od każdego z wyrazów tego ciągu będzie następnym po nich składnikiem pierwszym: pomnożona (prawostronnie) przez ω da następny składnik pierwszy i t. d.

Udowodnimy jeszcze

Twierdzenie: Każdy składnik pierwszy jest podzielny lewostronnie przez każdą mniejszą od niego liczbę porządkową > 0, *przyczem iloraz znowu jest składnikiem pierwszym.*

Dowód. Niech ρ oznacza dany składnik pierwszy, i niech będzie $0 < \alpha < \rho$. W myśl tw. z § 85, możemy położyć

$$\rho = \alpha\xi + \rho_1, \text{ gdzie } 0 \leqq \rho_1 < \alpha,$$

zatem, tembardziej, $\rho_1 < \rho$. Gdyby było $\rho_1 > 0$, to jak łatwo widzieć, ρ byłoby sumą dwuch liczb mniejszych od ρ, co niemożliwe, skoro ρ jest składnikiem pierwszym. Musi więc być $\rho_1 = 0$, czyli $\rho = \alpha\xi$, co dowodzi lewostronnej podzielności ρ przez α.

Okażemy teraz, że iloraz ξ jest składnikiem pierwszym.

Gdyby było

$$\xi = \mu + \nu, \text{ gdzie } \mu < \xi, \nu < \xi, \qquad (9)$$

to mielibyśmy (§ 85) $\alpha\mu < \alpha\xi$, $\alpha\nu < \alpha\xi$, czyli (wobec $\rho = \alpha\xi$)

$$\alpha\mu < \rho, \ \alpha\mu < \rho,$$

a że, wobec (9):

$$\rho = \alpha\xi = \alpha(\mu + \nu) = \alpha\mu + \alpha\nu,$$

więc ρ byłoby sumą dwuch liczb mniejszych, co niemożliwe. Liczba ξ jest więc składnikiem pierwszym, c. b. d. o.

§ **88.** *Czynnikiem pierwszym*, albo liczbą nierozkładalną ze względu na mnożenie, nazywamy każdą liczbę porządkową > 1, która nie jest iloczynem dwuch czynników od niej mniejszych. Jeżeli $\alpha > 1$, to istnieją dzielniki prawostronne liczby α, większe od jedności (gdyż np. $\alpha = 1.\alpha$): wśród nich istnieje jeden najmniejszy π_1: łatwo widzieć, że π_1 jest czynnikiem pierwszym (gdyż, w razie $\pi_1 = \mu.\nu$, gdzie $\mu < \pi_1$, $\nu < \pi_1$, mielibyśmy $\nu > 1$, i ν byłoby dzielnikiem prawostronnym liczby α, mniejszym od π_1). Połóżmy $\alpha = \alpha_1\pi_1$: będzie $\alpha_1 < \alpha$, gdyż w razie $\alpha_1 \geqslant \alpha$ byłoby (§ 85) $\alpha_1\pi_1 > \alpha$. Postępując z liczbą α_1, jak z liczbą α, znajdziemy $\alpha_1 = \alpha_2\pi_2$, gdzie π_2 jest czynnikiem pierwszym, zaś $\alpha_2 < \alpha_1$. Ponieważ ciąg liczb porządkowych malejących nie może być nieskończonym, więc dochodzimy w ten sposób do rozwinięcia liczby α na skończony iloczyn czynników pierwszych. Mamy więc

Twierdzenie: Każda liczba porządkowa > 1 *jest iloczynem skończonej liczby czynników pierwszych.*

Rozkład na czynniki pierwsze nie jest jednak jednoznacznym[1]): mamy np. $(\omega + 1).\omega = \omega.\omega$, przyczem można z łatwością udowodnić, że liczby ω i $\omega + 1$ są czynnikami pierwszymi.

Co się tyczy dzielników prawostronnych, to zauważymy, że każda liczba porządkowa posiada ich skończoną liczbę. W samej rzeczy, niech ν i $\nu_1 > \nu$ będą dwa różne dzielniki prawostronne liczby α: mamy więc $\alpha = \mu\nu = \mu_1\nu_1$. Gdyby było $\mu_1 \geqslant \mu$, mielibyśmy, wobec $\nu_1 > \nu$ (§ 85): $\mu_1\nu_1 > \mu.\nu$, co niemożliwe: musi więc być $\mu_1 < \mu$. Gdyby więc istniał ciąg nieskończony rosnący dzielników prawostronnych, to istniałby ciąg nieskończony malejący dzielników lewostronnych, co niemożliwe. Wnosimy stąd, że *zbiór wszystkich dzielników prawostronnych jest dla każdej liczby porządkowej skończony.* Twierdzenie podobne nie zachodzi dla dzielników lewostronnych: np. każda liczba

[1]) A. Schoenflies (*Entwickelung der Mengenlehre*, Lipsk i Berlin 1913, str. 161) wypowiada twierdzenie o jednoznaczności rozkładu, co jest zapewne wynikiem jakiegoś przeoczenia.

naturalna jest dzielnikiem lewostronnym liczby ω. (Por. ostatnie tw. z § 87).

§ **89.** Niech μ i α będą dwie dane liczby porządkowe > 0. Weźmy pod rozwagę zbiór Z wszystkich ciągów pozaskończonych (względnie skończonych) typu α, których wyrazami są liczby porządkowe (≥ 0) mniejsze od μ, przyczem conajwyżej skończona liczba z pośród nich $\neq 0$.

Niech $A = \{a_\xi\}_{\xi < \alpha}$ oraz $B = \{b_\xi\}_{\xi < \alpha}$ będą dwa różne ciągi, należące do Z. Liczba wskaźników ξ, dla których $0 \leq \xi < \alpha$ oraz $a_\xi \neq 0$, względnie $b_\xi \neq 0$, jest więc skończoną. Wynika stąd natychmiast, że i liczba tych ξ $(0 \leq \xi < \alpha)$ dla których $a_\xi \neq b_\xi$, jest skończoną (wskaźniki takie oczywiście istnieją, skoro ciągi A i B są różne). Wśród nich istnieje więc jeden największy ν. Umówimy się uważać $A \prec B$, jeżeli $a_\nu < b_\nu$, zaś $B \prec A$, jeżeli $a_\nu > b_\nu$. Łatwo okazać, że przez umowę powyższą zbiór Z zostanie uporządkowany.

Wystarczy w tym celu jeszcze tylko dowieść, że wzory $A \prec B$, $B \prec C$ pociągają za sobą wzór $A \prec C$ (dla każdych trzech ciągów A, B, C, należących do zbioru Z). Niech więc A, B oraz $C = \{c_\xi\}_{\xi < \alpha}$ będą trzy dane ciągi, należące do Z, takie iż $A \prec B$ oraz $B \prec C$. Niech ν oznacza największy wskaźnik, taki iż $a_\nu \neq b_\nu$ zaś λ — największy wskaźnik, taki iż $b_\lambda \neq c_\lambda$.

Wobec $A \prec B$ oraz przyjętej wyżej umowy co do łączenia naszych ciągów znakiem $\prec$, mamy $a_\nu < b_\nu$: podobnież, wobec $B \prec C$ musi być $b_\lambda < c_\lambda$. Rozróżnimy dalej trzy przypadki.

1) $\lambda = \nu$. W tym przypadku mamy $a_\nu < b_\nu$ oraz $b_\nu < c_\nu$, co daje $a_\nu < c_\nu$. Z drugiej strony, wobec definicji liczb ν i λ, mamy $a_\xi = b_\xi$ dla $\nu < \xi < \alpha$ oraz $b_\xi = c_\xi$ dla $\lambda < \xi < \alpha$, zatem, wobec $\lambda = \nu$, mamy $a_\xi = c_\xi$ dla $\nu < \xi < \alpha$. Wynika stąd, że ν jest największym wskaźnikiem, przy którym $a_\nu \neq c_\nu$, a że $a_\nu < c_\nu$, więc mamy $A \prec C$.

2) $\lambda < \nu$. Mamy tu więc (wobec definicji liczby λ) $b_\nu = c_\nu$, a że $a_\nu < b_\nu$, więc znajdujemy $a_\nu < c_\nu$. Z drugiej strony, wobec definicji liczb ν i λ, oraz wobec $\lambda < \nu$, mamy $a_\xi = b_\xi$ oraz $b_\xi = c_\xi$ dla $\nu < \xi < \alpha$, skąd $a_\xi = c_\xi$ dla $\nu < \xi < \alpha$. Mamy więc zawsze $A \prec C$.

3) $\lambda > \nu$. Mamy tu więc (wobec definicji liczby ν): $a_\lambda = b_\lambda$, a że $b_\lambda < c_\lambda$, więc mamy $a_\lambda < c_\lambda$. Z drugiej strony, wobec definicji liczb

ν i λ i wobec $\nu < \lambda$, mamy $a_\xi = b_\xi = c_\xi$ dla $\lambda < \xi < \alpha$, skąd znowu wynika $A \prec C$.

Dowiedliśmy więc, że przez umowę naszą zbiór Z został uporządkowany (według tak zwanej *zasady ostatnich różnic*).

Przykłady. Dla $\mu = \alpha = 2$ zbiór Z składa się, jak łatwo widzieć, z czterech ciągów, które będą uporządkowane w ten sposób:

$$(0,\ 0) \prec (1,\ 0) \prec (0,\ 1) \prec (1,\ 1)$$

Dla $\mu = 2$, $\alpha = 3$ otrzymamy 8 ciągów:

$$(0,0,0) \prec (1,0,0) \prec (0,1,0) \prec (1,1,0) \prec (0,0,1) \prec (1,0,1) \prec (0,1,1) \prec (1,1,1).$$

Łatwo widzieć, że jeżeli liczby μ i α są skończone, to liczba ciągów, tworzących zbiór Z, wynosi μ^α.

Umówimy się dla wszelkich liczb porządkowych dodatnich μ i α oznaczać symbolem μ^α typ $\overline{Z}$ zbioru Z.

Okażemy, że dla wszystkich liczb porządkowych μ, α i β zachodzi wzór

$$\mu^{\alpha+\beta} = \mu^\alpha . \mu^\beta \qquad (1)$$

Oznaczmy, ogólnie, przez $Z(\alpha, \mu)$ zbiór wszystkich ciągów typu α, których wyrazami są liczby porządkowe $< \mu$, przyczem skończona conajwyżej liczba z pośród nich $\neq 0$, i jak wyżej, uporządkujmy zbiór $Z(\alpha, \mu)$ według zasady ostatnich różnic.

Niech $C = \{c_\xi\}_{\xi < \alpha+\beta}$ oznacza jakikolwiek dany ciąg, należący do zbioru $Z(\alpha+\beta, \mu)$. Wyraz c_α ciągu C rozbija ten ciąg na dwa ciągi: odcinek $A = \{c_\xi\}_{\xi < \alpha}$ oraz resztę $B = \{c_\xi\}_{\alpha \leqq \xi < \alpha+\beta}$.

Jasnem jest, że ciąg A należy do zbioru $Z(\alpha, \mu)$, zaś ciąg B — do zbioru $Z(\beta, \mu)$. Naodwrót, gdybyśmy po dowolnym ciągu A, należącym do $Z(\alpha, \mu)$, wypisali dowolny ciąg B, należący do $Z(\beta, \mu)$, to otrzymalibyśmy ciąg $C = A + B$, należący do $Z(\alpha+\beta, \mu)$.

Łatwo dalej widzieć, że jeżeli $C = A + B$ oraz $C' = A' + B'$ są odpowiednie rozkłady ciągów C i C' należących do $Z(\alpha + \beta, \mu)$, to będzie $C \prec C'$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $B \prec B'$ w zbiorze $Z(\beta, \mu)$, lub jeżeli jednocześnie $B = B'$, zaś $A \prec A'$ w zbiorze $Z(\alpha, \mu)$. Stąd, i z uwagi, że zbiory $Z(\alpha, \mu)$, $Z(\beta, \mu)$ i $Z(\alpha+\beta, \eta)$ są odpowiednio typów μ^α, μ^β i $\mu^{\alpha+\beta}$, wynika (w myśl definicji iloczynu dwuch typów, § 71) wzór (1), c. b. d. o.

W szczególności, dla $\beta = 1$, wzór (1) daje:

$$\mu^{\alpha+1} = \mu^{\alpha} . \mu \qquad (2)$$

dla wszelkich liczb porządkowych μ i α.

Okażemy obecnie, że przy wszelkich liczbach porządkowych μ i α potęga μ^{α} jest liczbą porządkową.

Załóżmy, dla dowodu, że przy pewnej liczbie porządkowej μ nie dla każdej liczby porządkowej α potęga μ^{α} jest liczbą porządkową. Istnieją więc (przy danem μ) takie liczby porządkowe α, iż μ^{α} nie jest typem zbioru dobrze upórządkowanego. Ponieważ, jak wiemy (§ 77), w każdym zbiorze liczb porządkowych istnieje liczba najmniejsza, więc istnieje najmniejsza liczba α, taka, iż μ^{α} nie jest liczbą porządkową. Wobec (2) i uwagi, że iloczyn dwuch liczb porządkowych jest zawsze liczbą porządkową, wnosimy, że α nie może być liczbą 1-go rodzaju. Liczba α jest więc 2-go rodzaju.

Skoro zbiór $Z(\alpha, \mu)$ (który jest typu μ^{α}) nie jest dobrze uporządkowany, więc istnieje w nim część nie pusta C, nie posiadająca elementu pierwszego. Niech

$$A = \{a_{\xi}\}_{\xi < \alpha}$$

oznacza ciąg, należący do C. Ponieważ conajwyżej skończona liczba wyrazów a_{ξ} jest w tym ciągu $\neq 0$, więc istnieje ostatnia liczba porządkowa $\lambda < \alpha$, taka, iż $a_{\lambda} \neq 0$. (Gdyby było stale $a_{\xi} = 0$ dla $0 \leqslant \xi < \alpha$, to ciąg A byłby oczywiście pierwszym elementem zbioru $Z(\alpha, \mu)$, a więc i jego części C, wbrew założeniu, że C nie posiada elementu pierwszego). Ze sposobu uporządkowania zbioru $Z(\alpha, \mu)$ wynika stąd, dalej, że dla każdego ciągu $B = \{b_{\xi}\}_{\xi < \alpha}$ należącego do C i wcześniejszego od A (o ile ciągi takie istnieją), musi być $b_{\xi} = 0$ dla $\lambda < \xi < \alpha$. Lecz zbiór wszystkich ciągów, należących do $Z(\alpha, \mu)$, w których wszystkie wyrazy o wskaźnikach $\xi > \lambda$ są równe zeru, jest jak łatwo widzieć, typu $\mu^{\lambda+1}$, a więc jest dobrze uporządkowany, wobec definicji liczby α i uwagi, że $\lambda + 1 < \alpha$ (gdyż $\lambda < \alpha$, zaś α jest liczbą 2-go rodzaju). Tembardziej więc byłby dobrze uporządkowanym (lub pustym) zbiór wszystkich ciągów należących do C i wcześniejszych od A. Stąd wniosek, że część C posiada element pierwszy, wbrew założeniu.

Przypuszczenie, że istnieją liczby porządkowe α, dla których μ^{α} nie jest liczbą porządkową, doprowadza więc do sprzeczności. Dowiedliśmy zatem, że *dla wszelkich liczb porządkowych μ i α potęga μ^{α} jest liczbą porządkową.*

Niech teraz α oznacza liczbę porządkową 2-go rodzaju. Dla $\xi < \alpha$ zbiór $Z(\xi, \mu)$ jest, jak łatwo widzieć, podobny odcinkowi zbioru $Z(\alpha, \mu)$, utworzonemu przez ciąg, którego wyraz o wskaźniku $\xi + 1$ jest $= 1$, zaś wszystkie inne $= 0$: wynika stąd, że

$$\mu^\xi < \mu^\alpha, \quad \text{dla} \quad \xi < \alpha.$$

Powiadam, że *μ^α jest najmniejszą liczbą porządkową $> \mu^\xi$, dla $\xi < \alpha$.*

W samej rzeczy, niech γ oznacza liczbę porządkową $< \mu^\alpha$. Liczba γ jest więc typem pewnego odcinka zbioru $Z(\alpha, \mu)$, np. odcinka, utworzonego przez ciąg $A = \{a_\xi\}_{\xi < \alpha}$. Istnieje, jak wiemy, ostatnia liczba porządkowa λ taka, iż $a_\lambda \neq 0$, przyczem $\lambda + 1 < \alpha$, gdyż α jest liczbą 2-go rodzaju. Jest więc $a_\xi = 0$ dla $\lambda + 1 \leqslant \xi < \alpha$. Tembardziej więc we wszystkich ciągach zbioru $Z(\alpha, \mu)$, wcześniejszych od A, wszystkie wyrazy o wskaźnikach $\geqslant \lambda + 1$ są $= 0$. Ponieważ zaś zbiór wszystkich ciągów zbioru $Z(\alpha, \mu)$, w których wyrazy o wskaźnikach $\geqslant \lambda + 1$ są $= 0$, jest typu μ^λ, więc mamy $\gamma < \mu^\lambda$. Żadna liczba $\gamma < \mu^\alpha$ nie spełnia więc nierówności $\gamma > \mu^\xi$ dla $\xi < \alpha$.

Okazaliśmy więc, że dla każdej liczby porządkowej μ istnieje funkcja $f(\alpha) = \mu^\alpha$, określona dla każdej liczby porządkowej α i spełniająca następujące trzy własności:

1) $f(1) = \mu$,

2) $f(\alpha + 1) = f(\alpha) \cdot \mu$ dla wszelkiej liczby porządkowej α,

3) Jeżeli α jest liczbą 2-go rodzaju, to $f(\alpha)$ jest pierwszą liczbą porządkową, większą od każdej z liczb $f(\xi)$, gdzie $\xi < \alpha$.

Łatwo widzieć, że *własności 1), 2) i 3) są dla funkcji $f(\alpha) = \mu^\alpha$ charakterystyczne.*

W samej rzeczy, przypuśćmy, że (przy danem μ) dwie różne funkcje $f_1(\alpha)$ i $f_2(\alpha)$ zmiennej porządkowej α spełniają warunki 1), 2) i 3). Skoro funkcje f_1 i f_2 są różne, więc istnieją liczby porządkowe ξ, takie iż $f_1(\xi) \neq f_2(\xi)$, a wśród nich istnieje najmniejsza, α. Mamy więc $f_1(\alpha) \neq f_2(\alpha)$, lecz

$$f_1(\xi) = f_2(\xi) \quad \text{dla} \quad \xi < \alpha. \tag{3}$$

Wobec (1) musi być oczywiście $\alpha > 1$.

Gdyby α było liczbą 1-go rodzaju, moglibyśmy położyć $\alpha = \xi + 1$, gdzie $\xi < \alpha$ i, wobec własności 2) funkcyj f_1 i f_2, byłoby

$$f_1(\alpha) = f_1(\xi + 1) = f_1(\xi) \cdot \mu, \qquad f_2(\alpha) = f_2(\xi + 1) = f_2(\xi) \cdot \mu,$$

skąd, wobec (3): $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, wbrew definicji liczby α.

Gdyby zaś α było liczbą 2-go rodzaju, to z własności 3) funkcyj f_1 i f_2 oraz wzoru (3) wynikałoby, że $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, znowu wbrew definicji liczby α.

Założenie, że $f_1 \neq f_2$ doprowadza więc do sprzeczności. Dowiedliśmy więc, że *dla każdej liczby porządkowej* μ *istnieje jedna i tylko jedna funkcja* $f(\alpha)$, *określona dla każdej liczby porządkowej* α *i spełniająca własności 1), 2) i 3).*

Zauważymy, że warunek 3) jest równoważny warunkowi, że dla każdego ciągu pozaskończonego liczb porządkowych $\{\varphi_\xi\}_{\xi<\gamma}$ wzór

$$\lim_{\xi<\gamma} \varphi_\xi = \alpha$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{\xi<\gamma} f(\varphi_\xi) = f(\alpha);$$

inaczej mówiąc, własność 3) wyraża, że funkcja $f(\alpha)$ jest *ciągłą.*

Możnaby więc jeszcze powiedzieć, że *funkcja* $f(\alpha) = \mu^\alpha$ *jest jedyną funkcją ciągłą zmiennej porządkowej* α, *spełniającą warunki:* $f(1) = \mu$, *oraz*

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \,.\, f(\beta),$$

dla wszelkich liczb porządkowych α i β (Analogiczne twierdzenie zachodzi, jak wiadomo, dla funkcyj zmiennej rzeczywistej, przy rzeczywistych $\mu > 0$).

Zauważymy, że potęga μ^α, będąc funkcją ciągłą wykładnika α, nie jest jednak funkcją ciągłą podstawy μ, bo np. $\lim\limits_{n<\omega} n = \omega$, lecz $\lim\limits_{n<\omega} n^2 = \omega < \omega^2$.

Z innych własności potęgi zauważymy, że możnaby dowieść, iż dla wszelkich liczb porządkowych μ, α i β zachodzi wzór

$$(\mu^\alpha)^\beta = \mu^{\alpha\beta}.$$

Natomiast nie zawsze mamy $(\mu\nu)^\alpha = \mu^\alpha\nu^\alpha$, gdyż np. $(\omega \,.\, 2)^2 \neq \omega^2 \,.\, 2^2$. Z nierówności dla potęg zauważymy nierówność

$$\mu^\xi < \mu^\eta, \quad \text{dla} \quad \mu > 1, \quad \xi < \eta;$$

łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Zauważymy jeszcze, że możnaby udowodnić, że dla $\mu \geqslant \omega$ zachodzi wzór

$$\mu^\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \mu^\xi, \quad \text{dla } \alpha \text{ 1-go rodzaju [1]},$$

[1]) Twierdzenie Schoenfliesa (Entwickelung der Mengenlehre, Lipsk i Berlin 1913, str. 127), że wzór ten zachodzi dla wszelkich α, jest błędne, gdyż np. $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^\omega = \omega^\omega + \omega^\omega > \omega^\omega$.

oraz wzór
$$\mu^{\alpha} = \sum_{\xi < \alpha} \mu^{\xi}, \quad \text{dla } \alpha \text{ 2-go rodzaju.}$$

(Więc np. $\omega^{\omega} = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots$).

§ **90.** Zajmiemy się, w szczególności, potęgą ω^{α}. Okażemy przedewszystkiem, że przy każdej liczbie porządkowej α liczba ω^{α} jest składnikiem pierwszym.

Przypuśćmy, dla dowodu, że tak nie jest: istniałaby więc najmniejsza liczba porządkowa α, taka że ω^{α} nie jest składnikiem pierwszym. Byłoby $\alpha > 1$, gdyż liczba ω jest, jak wiemy, składnikiem pierwszym.

Gdyby α było liczbą pierwszego rodzaju, to moglibyśmy położyć $\alpha = \xi + 1$, gdzie $\xi < \alpha$. Liczba ω^{ξ} byłaby więc składnikiem pierwszy, a więc też, w myśl tw. z § 87, i liczba $\omega^{\xi} . \omega = \omega^{\xi+1} = \omega^{\alpha}$ byłaby składnikiem pierwszym, wbrew definicji liczby α.

Załóżmy więc, że α jest liczbą 2-go rodzaju. Wówczas, jak wiemy (§ 89), ω^{α} jest pierwszą liczbą, większą od każdej z liczb ω^{ξ}, gdzie $\xi < \alpha$, przyczem zbiór Z wszystkich liczb ω^{ξ}, gdzie $\xi < \alpha$, nie zawiera liczby największej (gdyż jeżeli $\xi < \alpha$, to, skoro α jest liczbą 2-go rodzaju, mamy też $\xi + 1 < \alpha$, zaś $\omega^{\xi} < \omega^{\xi+1}$).

Ponieważ zaś wszystkie liczby zbioru Z są składnikami pierwszymi (co wynika z definicji liczby α), więc ω^{α}, jako pierwsza liczba porządkowa większa od każdej liczby zbioru Z, jest, w myśl twierdzenia, udowodnionego w § 81, składnikiem pierwszym, znowu wbrew definicji liczby α.

Założenie, że nie wszystkie liczby ω^{α} są składnikami pierwszymi, doprowadza więc do sprzeczności.

Okażemy teraz, że, naodwrót, każdy składnik pierwszy jest pewną potęgą liczby ω. W tym celu zauważymy przedewszystkiem nierówność
$$\gamma^{\alpha} \geqslant \alpha \tag{1}$$
dla każdej liczby porządkowej $\gamma > 1$ i każdej liczby porządkowej α. Dla dowodu nierówności (1) wystarczy zauważyć, że γ^{α} jest typem zbioru $Z(\alpha, \gamma)$ (§ 89), i że ciągi typu α, których jeden wyraz jest $= 1$, zaś pozostałe są $= 0$, tworzą część typu α zbioru $Z(\alpha, \gamma)$. Dalej mamy

Lemmat. Dla każdej liczby porządkowej $\xi > 0$ i każdej liczby porządkowej $\gamma > 1$ istnieje (jak łatwo widzieć, jedna tylko) liczba porządkowa $\alpha \geqslant 0$, spełniająca nierówności
$$\gamma^{\alpha} \leqslant \xi < \gamma^{\alpha+1} \tag{2}$$
(przyczem przez γ^0 należy rozumieć liczbę 1).

Dowód. W myśl (1) istnieją (przy danych $\xi > 0$ oraz $\gamma > 1$) liczby porządkowe ν, takie iż $\gamma^\nu > \xi$ (gdyż np. $\gamma^{\xi+1} > \gamma^\xi \geqslant \xi$): niech ν oznacza najmniejszą z nich. Gdyby liczba ν była drugiego rodzaju, to γ^ν byłoby, jak wiemy (§ 89), najmniejszą liczbą porządkową $> \gamma^\eta$, dla $\eta < \nu$. Lecz dla $\eta < \nu$ mielibyśmy (gdyby ν było liczbą 2-go rodzaju) $\eta + 1 < \nu$, co daje, wobec definicji liczby ν, nierówność $\gamma^{\eta+1} \leqslant \xi$, zatem $\gamma^\eta < \xi$: liczba $\xi < \gamma^\nu$ byłaby więc mniejszą od γ^ν liczbą, większą od każdej z liczb γ^η, gdzie $\eta < \nu$, co niemożliwe. Liczba ν jest więc 1-go rodzaju i możemy położyć $\nu = \alpha + 1$, skąd, wobec definicji liczby ν, wynika nierówność (2).

Niech teraz ρ oznacza dany składnik pierwszy. W myśl naszego lemmatu (dla $\gamma = \omega$) istnieje dla liczby ρ liczba porządkowa α, taka iż

$$\omega^\alpha \leqslant \rho < \omega^{\alpha+1} \tag{3}$$

Jak dowiedliśmy w § 87, najmniejszym składnikiem pierwszym $> \beta$ jest $\beta\omega$, zatem najmniejszym składnikiem pierwszym $> \omega^\alpha$ jest $\omega^\alpha \cdot \omega = \omega^{\alpha+1}$: nierówność (3) dowodzi więc, że musi być $\rho = \omega^\alpha$.

Dowiedliśmy więc, że *składniki pierwsze są to potęgi liczby* ω *i naodwrót.*

§ **91.** W § 81 dowiedliśmy, że każda liczba porządkowa daje się, i to w jeden tylko sposób, rozwinąć na skończony szereg składników pierwszych, nie rosnących. Jeżeli w tem rozwinięciu ten sam składnik ρ powtarza się kolejno n razy, to sumę takich n składników ρ możemy zastąpić przez $\rho . n$. Z uwagi, że składniki pierwsze są potęgami liczby ω (§ 90), możemy więc wypowiedzieć:

Twierdzenie: *Każda liczba porządkowa* $\xi > 0$ *daje się i to w jeden tylko sposób przedstawić w postaci*

$$\xi = \omega^{\alpha_0}\nu_0 + \omega^{\alpha_1}\nu_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k}\nu_k, \tag{4}$$

gdzie k oraz $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k$ *są liczby naturalne, zaś*

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$$

jest ciągiem malejącym liczb porządkowych $\geqslant 0$.

Wzór (4) nazywamy według Cantora *formą normalną* liczby ξ, zaś liczbę α_0 nazywamy jej *stopniem*. Wobec nierówności (1) mamy $\alpha_0 \leqslant \omega^{\alpha_0} \leqslant \omega^{\alpha_0} \cdot \nu_0 \leqslant \xi$, skąd wniosek, że stopień liczby (w formie normalnej) nie przenosi samej liczby.

Wzór (4) jest analogiczny do rozwinięcia dziesiętnego liczb naturalnych, przyczem zasada 10 zastąpiona jest przez ω. Ale możnaby

dowieść, że, przy wszelkiej liczbie porządkowej $\gamma > 1$, każda liczba porządkowa $\xi > 0$ daje się (i to w jeden tylko sposób) przedstawić w postaci

$$\xi = \gamma^{\alpha_0}\mu_0 + \gamma^{\alpha_1}\mu_1 + \ldots + \gamma^{\alpha_k}\mu_k, \tag{5}$$

gdzie k jest liczbą naturalną,

$$0 < \mu_j < \gamma, \quad \text{dla } j = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

zaś

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k.$$

W samej rzeczy, niech ξ oznacza daną liczbę porządkową dodatnią. W myśl lemmatu z § 90 istnieje liczba porządkowa α_0, taka iż

$$\gamma^{\alpha_0} \leqslant \xi < \gamma^{\alpha_0+1}$$

Wobec $\xi < \gamma^{\alpha_0+1} = \gamma^{\alpha_0}\cdot\gamma$ i w myśl tw. z § 86, możemy liczbę ξ przedstawić w postaci

$$\xi = \gamma^{\alpha_0}\mu_0 + \xi_1, \text{ gdzie } \mu_0 < \gamma,\ \xi_1 < \gamma^{\alpha_0} \leqslant \xi.$$

Postępując z liczbą ξ_1 jak z liczbą ξ i t. d., otrzymujemy (z uwagi, że ciąg malejący liczb porządkowych nie może być nieskończonym) rozwinięcie (5).

W szczególności, dla $\gamma = 2$, otrzymujemy stąd dla każdej liczby porządkowej ξ rozwinięcie

$$\xi = 2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k},$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest ciągiem skończonym, malejącym, liczb porządkowych.

Zauważymy, że zapomocą rozwinięcia (4), a nawet ogólniej, zapomocą rozwinięć (5), nie każda liczba porządkowa daje się przedstawić przez liczby od niej mniejsze: istnieją mianowicie liczby porządkowe $\xi > 1$, takie iż przy wszelkiem γ pierwszy wykładnik α_0 we wzorze (5) jest $= \xi$: liczby takie poznamy w następnym paragrafie.

§ **92.** Połóżmy

$$\varepsilon = \omega + \omega^{\omega} + \omega^{\omega^{\omega}} + \ldots. \tag{1}$$

Składniki tego szeregu, jako potęgi liczby ω, są składnikami pierwszymi, a więc pochłaniają każdy mniejszy od nich, stojący przed nimi składnik (§ 80). Z drugiej strony, są one stale rosnące, gdyż, oznaczając przez ω_n n-ty składnik, mamy oczywiście $\omega_2 > \omega_1$, zaś z nierówności $\omega_n > \omega_{n-1}$ wynika nierówność

$$\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n} > \omega^{\omega_{n-1}} = \omega_n.$$

Zatem każdy składnik szeregu (1) pochłania wszystkie poprzedzające go składniki i przeto każda suma cząstkowa szeregu (1) równa jest ostatniemu swemu składnikowi. Ponieważ zaś suma szeregu nieskończonego liczb porządkowych jest granicą swych sum cząstkowych (§ 83), więc mamy

$$\varepsilon = \lim_{n<\omega} \omega_n$$

Wynika stąd, z uwagi, że potęga jest funkcją ciągłą wykładnika:

$$\omega^\varepsilon = \lim_{n<\omega} \omega^{\omega_n} = \lim_{n<\omega} \omega_{n+1} = \varepsilon$$

Liczba ε spełnia więc warunek

$$\omega^\varepsilon = \varepsilon \qquad (2)$$

Cantor nazywa liczbą *epsilonową* każdą liczbę porządkową ε, spełniającą równanie (2): można z łatwością okazać, że liczba (1) jest najmniejszą z nich.

W samej rzeczy, załóżmy, że $\omega^\eta = \eta$. Mamy stąd $\eta > \omega_1$. Z drugiej strony, nierówność $\eta > \omega_n$ pociąga za sobą $\eta = \omega^\eta > \omega^{\omega_n} > \omega_{n+1}$. Mamy więc $\eta > \omega_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, skąd $\eta \geq \lim\limits_{n<\omega} \omega_n = \varepsilon$.

Łatwo widzieć, że w rozwinięciu normalnem liczby ε, t. j. we wzorze (4) z § 91, dla $\xi = \varepsilon$, mamy $k = 0$, $\alpha_0 = \varepsilon$, $\nu_0 = 1$: rozwinięcie normalne liczby ε nie pozwala więc wyrazić tej liczby przez liczby mniejsze. Zauważymy, że możnaby dowieść, iż $\gamma^\varepsilon = \varepsilon$ dla $1 < \gamma < \varepsilon$, skąd wynika, że w każdem rozwinięciu (5) z § 91 dla liczby ε mamy $\alpha_0 = \varepsilon$, jeżeli $1 < \gamma < \varepsilon$: żadne więc rozwinięcie (5) nie pozwala wyrazić liczby ε zapomocą liczb mniejszych.

Zauważymy jeszcze, że możnaby z łatwością okazać, iż jeżeli położymy dla dowolnej danej liczby porządkowej $\gamma > 0$:

$$\eta_1 = \gamma, \; \eta_n = \omega^{\eta_{n-1}}, \text{ dla } n = 2, 3, \ldots,$$

to liczba $E(\gamma) = \lim\limits_{n<\omega} \eta_n$ będzie najmniejszą liczbą epsilonową $\geq \gamma$. Więc np. najmniejszą liczbą epsilonową jest $\varepsilon = E(1)$; najmniejszą liczbą epsilonową $> \varepsilon$ będzie $E(\varepsilon + 1)$ i t. d.

Niech γ oznacza daną liczbę porządkową. Jeżeli $\gamma > 0$ i jeżeli nierówności

$$\alpha < \gamma, \; \beta < \gamma \qquad (3)$$

pociągają za sobą zawsze nierówność

$$\alpha + \beta < \gamma,$$

nazywamy γ *liczbą główną dodawania;* jeżeli $\gamma > 2$ i jeżeli nierówności (3) pociągają za sobą zawsze nierówność

$$\alpha\beta < \gamma,$$

nazywamy γ *liczbą główną mnożenia;* jeżeli wreszcie $\gamma > \omega$ i nierówności (3) pociągają za sobą zawsze nierówność

$$\alpha^{\beta} < \gamma,$$

nazywamy γ *liczbą główną potęgowania.*

Łatwo dowieść, że liczby główne dodawania są składnikami pierwszymi i naodwrót. Jasnem jest dalej, że liczby główne mnożenia są czynnikami pierwszymi, ale nie naodwrót [1]), bo np. liczba $\omega + 1$ jest czynnikiem pierwszym, ale nie liczbą główną mnożenia (skoro $\omega . \omega > \omega + 1$). Możnaby dowieść, że liczby główne mnożenia mają postać ω^{φ}, gdzie φ jest składnikiem pierwszym i naodwrót: każda liczba tej postaci jest liczbą główną mnożenia. Wreszcie możnaby okazać, że liczby główne potęgowane są to liczby epsilonowe i naodwrót.

Zauważymy wreszcie, iż możnaby dowieść, że na to, iżby liczba porządkowa $\gamma > 0$ była liczbą główną dodawania, potrzeba i wystarcza, żeby było

$$\alpha + \gamma = \gamma, \text{ dla } \alpha < \gamma;$$

na to żeby $\gamma > 2$ było liczbą główną mnożenia — potrzeba i wystarcza, żeby było

$$\alpha\gamma = \gamma, \text{ dla } \alpha < \gamma;$$

wreszcie na to, żeby $\gamma > \omega$ było liczbą główną potęgowania — potrzeba i wystarcza, żeby było

$$\alpha^{\gamma} = \gamma, \text{ dla } \alpha < \gamma.$$

---

[1]) Możnaby dowieść, że czynniki pierwsze, które są liczbami 2-go rodzaju, są liczbami głównemi mnożenia, czynniki zaś pierwsze, które są liczbami 1-go rodzaju, mają postać $\varphi + 1$, gdzie φ jest składnikiem pierwszym (i naodwrót).

ROZDZIAŁ XI.

Klasy liczbowe i alefy.

§ **93.** Jeżeli α jest daną liczbą porządkową, to wszystkie zbiory typu α (jako podobne) są tej samej mocy: odpowiadającą im liczbę kardynalną oznaczamy przez $\overline{\alpha}$ i nazywamy mocą liczby α. Ponieważ, jak wiemy (§ 76) α jest zarazem typem zbioru wszystkich liczb porządkowych $\xi < \alpha$ (włączając 0), więc $\overline{\alpha}$ jest mocą mnogości wszystkich liczb porządkowych $< \alpha$.

Liczby porządkowe pozaskończone (t. j. $\geqslant \omega$) dzielimy na klasy, zaliczając do tej samej klasy wszystkie liczby równej mocy. Wszystkie liczby porządkowe skończone tworzą *pierwszą klasę* liczb porządkowych. Liczby porządkowe α, odpowiadające zbiorom przeliczalnym (a więc takie, iż $\overline{\alpha} = \aleph_0$) zaliczamy do *klasy 2-giej*. Najmniejszą liczbą porządkową klasy 2-giej jest oczywiście liczba ω.

Zajmiemy się obecnie bliżej własnościami liczb klasy 2-giej.

Ponieważ, jak wiemy (§ 54) suma szeregu skończonego lub nieskończonego (przeliczalnego) liczb kardynalnych $\leqslant \aleph_0$ jest liczbą kardynalną $\leqslant \aleph_0$, więc wnosimy stąd, że suma szeregu skończonego lub nieskończonego (typu ω; lub ogólniej, typu α, gdzie α jest liczbą 2-giej klasy) liczb 1-szej lub 2-giej klasy jest zawsze liczbą 1-szej lub 2-giej klasy. Wynika stąd z łatwością, że *granica ciągu nieskończonego rosnącego (typu ω) liczb klasy 2-giej jest zawsze liczbą klasy 2-giej.* (Granicą ciągu rosnącego liczb klasy 1-szej jest oczywiście liczba ω). W samej rzeczy, załóżmy, że

$$\lambda = \lim_{n < \omega} \psi_n , \qquad (1)$$

gdzie ψ_n są liczby klasy 2-giej, przyczem

$$\psi_{n+1} > \psi_n, \text{ dla } n = 1, 2, \ldots. \qquad (2)$$

Wobec (2) oraz w myśl tw. 3 z § 78, możemy położyć

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \alpha_n, \text{ dla } n = 1, 2, \ldots. \qquad (3)$$

Wobec (3) łatwo widzieć, że przy wszelkiem naturalnem n liczba ψ_n jest $n+1$-szą sumą cząstkową szeregu

$$\psi_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots, \qquad (4)$$

skąd, wobec (1), wniosek (§ 83), że λ jest sumą szeregu (4), co daje

$$\overline{\lambda} = \overline{\psi}_1 + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 + \ldots. \qquad (5)$$

Lecz, wobec (3), znajdujemy $\psi_{n+1} = \psi_n + \alpha_n \geqslant \alpha_n$, co dowodzi, że $\overline{\alpha}_n \leqslant \overline{\psi}_{n+1} = \aleph_0$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, a że $\overline{\psi}_1 = \aleph_0$, więc wszystkie składniki szeregu (5) są liczbami kardynalnemi (dodatniemi) $\leqslant \aleph_0$, skąd, jak wiemy wynika, że suma jego $\overline{\lambda} = \aleph_0$. Liczba (1) jest więc liczbą klasy 2-giej, c. b. d. o.

Z twierdzenia, że suma szeregu przeliczalnego liczb klasy drugiej jest zawsze liczbą klasy 2-giej, wynika natychmiast, że *dla każdego zbioru przeliczalnego liczb klasy 2-giej istnieje liczba klasy 2-giej, większa od każdej z liczb uważanego zbioru.* Jako natychmiastowy wniosek stąd otrzymujemy twierdzenie, że *zbiór wszystkich liczb klasy 2-giej jest nieprzeliczalny.*

Podany przez nas dowód twierdzenia o nieprzeliczalności zbioru wszystkich liczb klasy 2-giej opiera się na pewniku Zermelo (gdyż robi użytek z twierdzenia o przeliczalności sumy szeregu nieskończonego zbiorów przeliczalnych, zob. § 54). Można je jednak udowodnić bez odwoływania się do pewnika Zermelo, jak następuje.

Przypuśćmy, że zbiór Z_2 wszystkich liczb klasy drugiej jest przeliczalny. Przeliczalnym byłby więc też i zbiór $Z = Z_1 + Z_2$ wszystkich liczb klasy 1-szej i 2-giej. Zbiór Z, jako zbiór liczb porządkowych, jest dobrze uporządkowany (według wielkości): oznaczmy przez Ω jego typ: będzie to więc liczba porządkowa, przyczem, z założenia naszego, że $\overline{\overline{Z}} = \aleph_0$, wynika, że $\overline{\Omega} = \aleph_0$, czyli że Ω jest liczbą klasy 2-giej, a więc jednym z elementów zbioru Z. Lecz każda liczba zbioru Z jest jak wiemy, zarazem typem zbioru wszystkich liczb od niej mniejszych, czyli typem odcinka, który w zbiorze Z tworzy. Zbiór dobrze uporządkowany Z byłby więc podobny swemu odcinkowi, co, jak wiemy, jest niemożliwe. Zbiór Z_2 jest więc nieprzeliczalny, c. b. d. o.

Zauważymy, że dowiedliśmy zarazem bez pomocy pewnika Zermelo, iż dla każdego zbioru przeliczalnego liczb porządkowych 2-giej klasy istnieje liczba 2-giej klasy, różna od każdej z liczb uważanego zbioru. (Nie potrafimy jednak dowieść bez pomocy pewnika Zermelo, że dla każdego zbioru przeliczalnego liczb 2-giej klasy istnieje liczba 2-giej klasy, *większa* od każdej z liczb uważanego zbioru).

§ **94.** Moc zbioru Z_2 wszystkich liczb klasy 2-giej oznaczamy przez $\aleph_1$. Ponieważ zbiór Z_2 zawiera część przeliczalną (którą tworzą np. liczby $\omega + n$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$), więc mamy $\aleph_1 \geqslant \aleph_0$, a że, jak dowiedliśmy w § 93, $\aleph_1 \neq \aleph_0$, więc mamy

$$\aleph_1 > \aleph_0 .$$

Udowodnimy obecnie, że *między* $\aleph_0$ i $\aleph_1$ *niema żadnej liczby kardynalnej pośredniej*. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje liczba kardynalna $\mathfrak{m}$, spełniająca nierówności

$$\aleph_0 < \mathfrak{m} < \aleph_1 \tag{1}$$

i niech M oznacza mnogość mocy $\mathfrak{m}$. Wobec $\mathfrak{m} < \aleph_1$, $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{Z_2}} = \aleph_1$, mnogość M jest równej mocy z pewną częścią C zbioru Z_2 wszystkich liczb 2-giej klasy. Lecz C, jako część zbioru dobrze uporządkowanego Z_2, jest podobna albo zbiorowi Z_2, albo pewnemu jego odcinkowi (§ 75). Pierwszy przypadek jest niemożliwy, gdyż mielibyśmy $\mathfrak{m} = \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{Z_2}} = \aleph_1$, wbrew założeniu. Ale i drugi przypadek jest niemożliwy, gdyż każdy odcinek zbioru Z_2 jest mocy $\leqslant \aleph_0$ (bowiem odcinek, utworzony przez element α zbioru Z_2, jest częścią zbioru wszystkich liczb porządkowych $< \alpha$, który jest typu α, zatem mocy $\aleph_0$, skoro α jest liczbą 2-giej klasy).

Nie istnieje więc żadna liczba kardynalna $\mathfrak{m}$, spełniająca nierówności (1).

Wnosimy też stąd, że każda część nieprzeliczalna zbioru mocy $\aleph_1$ jest zbiorem mocy $\aleph_1$. Z pewnika Zermelo, jak to udowodnimy w następnym rozdziale, wynika trichotomja, w szczególności więc wynika, że każda liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ daje się z liczbą $\aleph_1$ połączyć jednym z trzech znaków: $<, =, >$. Jeżeli zatem $\mathfrak{m} > \aleph_0$, to musi być $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_1$ (ponieważ nie może wówczas być $\mathfrak{m} < \aleph_1$, skoro między $\aleph_0$ i $\aleph_1$ niema, jak dowiedliśmy, liczby kardynalnej pośredniej). Zatem z pewnika Zermelo wynika, że każda mnogość nieprzeliczalna zawiera część mocy $\aleph_1$. Wynika stąd, dalej, natychmiast, że jeżeli każda część nieprzeliczalna pewnego zbioru nieprzeliczalnego N jest równej mocy

z samym zbiorem N, to N jest mocy $\aleph_1$. Możnaby więc też określać liczbę kardynalną $\aleph_1$ jako moc każdego takiego zbioru nieprzeliczalnego, który jest równej mocy z każdą swą częścią nieprzeliczalną. (Podobnie $\aleph_0$ możnaby określić jako moc każdego takiego zbioru nieskończonego, który jest równej mocy z każdą swą częścią nieskończoną).

Okażemy jeszcze przy pomocy pewnika Zermelo, ale nie odwołując się do trichotomji, że

$$\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0} \tag{2}$$

Niech

$$w_1, w_2, w_3, \ldots . \tag{3}$$

będzie dany ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich (różnych) liczb wymiernych: ciąg taki potrafimy, jak wiadomo, efektywnie zbudować. Podzielmy teraz mnogość M wszystkich liczb rzeczywistych na $\aleph_1$ części rozłącznych w następujący sposób.

Niech x oznacza daną liczbę rzeczywistą. Liczbę x możemy, jak wiadomo, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci

$$x = c + \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + \ldots,$$

gdzie c oznacza największą liczbę całkowitą $< x$, zaś $n_1, n_2, n_3, \ldots$ jest ciągiem nieskończonym rosnącym liczb naturalnych.

Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_{n_1}, w_{n_2}, w_{n_3}, \ldots, \tag{4}$$

wyjęty z ciągu (3). Zbiór wszystkich wyrazów ciągu (4), uporządkowany według wielkości, będzie pewnym typem porządkowym przeliczalnym, który, jako zależny od liczby x, oznaczymy przez $\varphi(x)$. Otóż, jeżeli typ $\varphi(x)$ nie jest liczbą porządkową, to zaliczymy liczbę x do zbioru M_ω, jeżeli zaś typ $\varphi(x)$ jest liczbą porządkową α (oczywiście klasy 2-giej), to zaliczymy liczbę x do zbioru M_α. Będziemy mieli oczywiście:

$$M = M_\omega + M_{\omega+1} + M_{\omega+2} + \ldots + M_\alpha + \ldots, \tag{5}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby porządkowe α 2-giej klasy, przyczem składniki tej sumy są rozłączne. Aby wreszcie dowieść, że są one nie puste, wystarczy powołać się na udowodnione w § 65 twierdzenie, że podmnogości zbioru wszystkich liczb wymiernych, uporządkowane według wielkości, mogą przedstawiać każdy typ

porządkowy przeliczalny. Dla każdej więc liczby porządkowej α klasy 2-giej istnieje ciąg nieskończony rosnący liczb naturalnych $n_1, n_2, n_3, \ldots$, taki iż zbiór (4), uporządkowany według wielkości liczb, które go tworzą, jest typu α. Kładąc

$$x = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + \ldots,$$

otrzymamy, jak łatwo widzieć, liczbę rzeczywistą, należącą do zbioru M_α. Mamy więc $M_\alpha \neq 0$ dla każdej liczby α klasy 2-giej.

Wzór (5) daje więc *rozkład efektywny zbioru wszystkich liczb rzeczywistych na* $\aleph_1$ *zbiorów nie pustych, nie mających elementów wspólnych*. W myśl pewnika Zermelo istnieje zbiór N, zawierający po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów, będących składnikami szeregu (5): zbiór N będzie oczywiście tej samej mocy, co mnogość wszystkich składników szeregu (5), a więc mocy $\aleph_1$. Dowiedliśmy więc (przy pomocy pewnika Zermelo) istnienia zbioru liczb rzeczywistych mocy $\aleph_1$, stąd wynika natychmiast nierówność (2).

Zauważymy, że nierówności (2) nie potrafimy dowieść, nie odwołując się do pewnika Zermelo. Nie potrafimy również dać przykładu efektywnego mnogości liczb rzeczywistych mocy $\aleph_1$.

Zagadnieniem continuum nazywamy, jak wiadomo (§ 38) pytanie, czy między $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ istnieją liczby kardynalne pośrednie. Zagadnienie to, jak łatwo widzieć, jest równoważne pytaniu, czy we wzorze (2) zachodzi znak $=$ czy też $<$. Jeżeli bowiem $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, to między $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ niema żadnej liczby kardynalnej pośredniej (gdyż, jak dowiedliśmy wyżej, niema takiej liczby między $\aleph_0$ i $\aleph_1$). Jeżeli natomiast $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, to $\aleph_1$ jest liczbą pośrednią między $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$.

Przypuszczenie, że $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (nie udowodnione, ani też nie obalone dotąd) nosi nazwę *hipotezy continuum:* jest więc ono równoważne przypuszczeniu, że między $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ niema żadnej liczby kardynalnej pośredniej. (Dowód równoważności przeprowadziliśmy jednak opierając się na pewniku Zermelo i nie potrafimy go przeprowadzić inaczej) [1]).

---

[1]) Możnaby dowieść, że hipoteza continuum jest równoważną przypuszczeniu, że istnieje zbiór P punktów płaszczyzny, który jest conajwyżej przeliczalny na każdej równoległej do osi odciętych i którego dopełnienie (do płaszczyzny) jest conajwyżej przeliczalne na każdej równoległej do osi rzędnych. Zob. W. Sierpiński: *O pewnem twierdzeniu, równoważnem hipotezie continuum.* Biuletyn Akademji Krakowskiej r. 1919.

§ **95.** W § 93 dowiedliśmy, że granica ciągu nieskończonego rosnącego (typu ω) liczb klasy 1-szej lub 2-giej jest liczbą klasy 2-giej, oczywiście 2-go rodzaju (co wynika bezpośrednio z definicji granicy). Udowodnimy obecnie twierdzenie odwrotne, mianowicie

Twierdzenie: Każda liczba 2-giej klasy i 2-go rodzaju jest granicą pewnego ciągu rosnącego typu ω (oczywiście liczb klasy 1-szej lub 2-giej).

Dowód. Niech α oznacza daną liczbę 2-giej klasy i 2-go rodzaju. Zbiór wszystkich liczb porządkowych $\xi < \alpha$ jest więc przeliczalny: niech

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \tag{1}$$

oznacza ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich tych liczb. Połóżmy $\alpha_1 = \xi_1$. Ciąg (1) nie posiada wyrazu największego, gdyż w takim razie liczba α, jako najmniejsza liczba porządkowa, większa od każdej z liczb (1), byłaby 1-go rodzaju, wbrew założeniu. Istnieją więc w ciągu (1) liczby $> \xi_1$: niech ξ_{k_2} oznacza pierwszą z nich: położymy $\alpha_2 = \xi_{k_2}$. Podobnież istnieją w ciągu (1) liczby $> \xi_{k_2}$: pierwszą z nich oznaczymy przez $\alpha_3 = \xi_{k_3}$ i t. d. Otrzymamy w ten sposób ciąg nieskończony rosnący liczb porządkowych

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \tag{2}$$

przyczem jasnem jest, że kładąc $\alpha_n = \xi_{k_n}$, będziemy mieli $k_1 < k_2 < \ldots$, i że przy wszelkiem naturalnem n wyraz ξ_{k_n} ciągu (1) będzie liczbą porządkową, większą od każdego z poprzedzających go wyrazów tego ciągu. Jeżeli więc ξ_p oznacza jakikolwiek dany wyraz ciągu (1), to, dla dostatecznie wielkich n będzie $k_n > p$ i przeto $\alpha_n = \xi_{k_n} > \xi_p$. Ponieważ zaś w ciągu (1) zawarte są wszystkie liczby porządkowe $< \alpha$, więc żadna z nich nie jest większą od każdego z wyrazów ciągu (2): liczba α (która oczywiście jest większą od każdej z liczb (2), jako wyjętych z ciągu (1)) jest więc najmniejszą liczbą porządkową, większą od każdej z liczb (2). Mamy więc, wobec definicji granicy ciągu pozaskończonego liczb porządkowych (§ 82):

$$\alpha = \lim_{n<\omega} \alpha_n,$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Dla każdej liczby 2-giej klasy i 2-go rodzaju istnieje więc ciąg nieskończony (typu ω) liczb od niej mniejszych, którego uważana liczba jest granicą: zauważymy jednak, że nie potrafimy ustalić prawa, w myśl którego każdej liczbie 2-giej klasy i 2-go rodzaju odpowiadał-

by jeden taki ciąg, podobnie jak nie potrafimy ustalić prawa, według którego każdej liczbie 2-giej klasy odpowiadałby oznaczony ciąg nieskończony (1), utworzony ze wszystkich liczb porządkowych od niej mniejszych.

Jako łatwy wniosek z dowiedzionego twierdzenia otrzymujemy

Twierdzenie: Jeżeli dany zbiór Z liczb porządkowych

1) *zawiera liczbę* 0,

2) *zawiera liczbę* $\alpha+1$, *skoro zawiera liczbę* α,

3) *zawiera granicę każdego ciągu nieskończonego* (*typu* ω), *którego wyrazy są elementami zbioru Z,*

to zbiór Z zawiera każdą liczbę porządkową 1-szej lub 2-giej klasy.

Innemi słowy: zbiór wszystkich liczb 1-szej i 2-giej klasy jest najmniejszym zbiorem liczb porządkowych, spełniającym warunki 1), 2) i 3).

W samej rzeczy, przypuśćmy, że dany zbiór Z, spełniający warunki 1), 2) i 3), nie zawiera pewnej liczby porządkowej 1-szej lub 2-giej klasy: niech α oznacza najmniejszą liczbę 1-szej lub 2-giej klasy, nie należącą do Z: w myśl 1) musi być $\alpha > 0$. Gdyby α było liczbą 1-go rodzaju, moglibyśmy położyć $\alpha = \xi + 1$, gdzie $\xi < \alpha$: w myśl definicji liczby α (jako najmniejszej, nie należącej do Z) liczba ξ należy do Z, skąd, w myśl własności 2) zbioru Z, liczba $\alpha = \xi + 1$ również należy do Z, wbrew jej definicji. Z drugiej strony, gdyby α było liczbą 2-go rodzaju, to, w myśl udowodnionego na początku tego § twierdzenia, moglibyśmy położyć $\alpha = \lim_{n<\omega} \alpha_n$, gdzie wyrazy α_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), jako liczby $< \alpha$, należą do Z, skąd, w myśl własności 3) zbioru Z, wynika, że liczba α należy do Z, znowu wbrew jej definicji. Stąd słuszność naszego twierdzenia.

Podobnie jak w § 73, wyprowadzamy z dowiedzionego twierdzenia natychmiast *zasadę indukcji pozaskończonej dla liczb 1-ej i 2-giej klasy*, polegającą na tem, że *na to, aby dowieść, iż jakieś twierdzenie T jest prawdziwem dla każdej liczby 1-szej lub 2-giej klasy, wystarcza dowieść, że* 1) *twierdzenie T jest prawdziwe dla liczby* 0, 2) *jeżeli twierdzenie T jest prawdziwe dla liczby* α, *to musi być prawdziwe dla liczby* $\alpha + 1$, 3) *Jeżeli twierdzenie T jest prawdziwe dla ciągu rosnącego* (*typu* ω) *liczb* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, *to jest prawdziwe również dla granicy tego ciągu.*

Dla dowodu jakiegoś twierdzenia T dla każdej liczby 1-szej klasy wystarcza, jak wiadomo, *indukcja skończona*, polegająca na udowodnieniu, że twierdzenie T spełnia warunki 1) i 2).

§ **96.** Podzieliliśmy w § 93 liczby porządkowe $\geqslant \omega$ na *klasy*, zaliczając do tej samej klasy dwie liczby porządkowe wtedy i tylko wtedy, jeżeli są równej mocy. W każdej klasie (jako pewnym zbiorze liczb porządkowych) istnieje liczba najmniejsza: nazywamy ją *liczbą początkową* uważanej klasy. Więc np. ω jest liczbą początkową klasy 2-giej, Ω oznacza liczbę początkową klasy 3-ciej (utworzonej z liczb porządkowych mocy $\aleph_1$).

Niech Z oznacza daną klasę liczb porządkowych $\geqslant \omega$, φ—jej liczbę początkową, P — zbiór wszystkich liczb początkowych (pozaskończonych) $< \varphi$. Zbiór P (jako pewien zbiór liczb porządkowych) jest dobrze uporządkowany: typ jego będzie więc pewną liczbą porządkową α. Otóż umówimy się liczbą początkową φ oznaczać przez ω_α. W ten sposób każdej liczbie początkowej jest przyporządkowany pewien wskaźnik porządkowy α. Wedle naszej umowy będzie więc $\omega = \omega_0$ (gdyż odpowiedni zbiór P jest pusty), $\Omega = \omega_1$. Mamy oczywiście $\overline{\omega_0} = \aleph_0$, $\overline{\omega_1} = \aleph_1$; położymy ogólnie $\overline{\omega_\alpha} = \aleph_\alpha$: będzie to więc moc każdej liczby porządkowej, należącej do klasy, której liczbą początkową jest ω_α; klasę tą będziemy oznaczali za Hausdorffem przez $Z(\aleph_\alpha)$: tworzą ją więc liczby porządkowe o mocy $\aleph_\alpha$. (Więc $Z(\aleph_0)$ oznacza klasę 2-gą).

Liczby $\aleph_\alpha$ nazywamy *alefami*. Moc każdego zbioru dobrze uporządkowanego jest więc alefem i naodwrót: każdy alef jest mocą pewnego zbioru dobrze uporządkowanego [1]).

Łatwo widzieć, że jeżeli $\alpha < \beta$, to $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. W samej rzeczy, z definicji liczb ω_ξ wynika, że jeżeli $\alpha < \beta$, to $\omega_\alpha < \omega_\beta$ (bowiem α jest typem zbioru P_α wszystkich liczb początkowych $< \omega_\alpha$ i podobnież β: gdyby więc było $\omega_\alpha \geqslant \omega_\beta$, mielibyśmy oczywiście $\alpha \geqslant \beta$, wbrew założeniu). Mamy więc $\overline{\omega_\alpha} \leqslant \overline{\omega_\beta}$: lecz nie może być $\overline{\omega_\alpha} = \overline{\omega_\beta}$, gdyż liczby ω_α i ω_β należą, wobec $\alpha < \beta$, do różnych klas: jest więc $\overline{\omega_\alpha} < \overline{\omega_\beta}$, czyli $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ c. b. d. o.

Wynika stąd, że *dla alefów zachodzi zawsze trichotomja.*

§ **97.** Niech α oznacza daną liczbę porządkową > 0 i załóżmy, że istnieją wszystkie liczby $\aleph_\eta$, dla $\eta < \alpha$, a więc też wszystkie zbiory $U_\eta = Z(\aleph_\eta)$, dla $\eta < \alpha$. Oznaczmy przez S zbiór złożony ze wszystkich liczb 1-szej klasy, oraz ze zbioru $\sum\limits_{\eta} U_\eta$, i położmy $\overline{S} = \sigma$.

---

[1]) Nie przesądzamy narazie, czy każdej liczbie porządkowej α odpowiada pewien alef, $\aleph_\alpha$: udowodnimy to później (§ 97).

Powiadam, że S jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych $< \sigma$. W samej rzeczy, zbiór S posiada, jak łatwo widzieć, tę własność, że jeżeli do niego należy liczba porządkowa φ, to należą też wszystkie liczby porządkowe $< \varphi$. Z drugiej strony każda liczba porządkowa jest, jak wiadomo, typem zbioru wszystkich liczb porządkowych od niej mniejszych. Wynika stąd, że każda liczba należąca do S jest typem pewnego odcinka tego zbioru (odcinka, który sama w zbiorze S wyznacza), zatem jest $< \sigma = \overline{S}$. Z drugiej strony, jeżeli ξ jest liczbą porządkową $< \sigma$, to ξ jest typem pewnego odcinka zbioru S, a że elementami zbioru S są liczby porządkowe, będące typami odcinków, które same w zbiorze S wyznaczają, więc ξ musi być elementem zbioru S. Dowiedliśmy w ten sposób, że $S = \{\xi\}_{\xi < \sigma}$.

Oznaczmy przez $U_\beta = Z(\aleph_\beta)$ klasę, do której należy liczba σ: będzie więc $\sigma \varepsilon U_\beta$, skąd, wobec $S = \sum\limits_{\eta < \alpha} U_\eta$ i uwagi, że σ nie należy do S (będąc, wobec $S = \{\xi\}_{\xi < \sigma}$, liczbą, większą od każdej z liczb zbioru S), wnosimy, że nie może być $\beta < \alpha$. Jest więc $\beta \geqslant \alpha$.

Lecz, skoro istnieje klasa $Z(\aleph_\beta)$, a więc też liczba ω_β, to (jak to wynika z definicji liczb ω_ξ, § 96) musi też istnieć każda z liczb ω_η dla $\eta \leqslant \beta$: w szczególności więc, wobec $\beta \geqslant \alpha$, musi istnieć liczba ω_α, a więc też liczba $\aleph_\alpha$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli α jest daną liczbą porządkową > 0 i jeżeli istnieją wszystkie liczby $\aleph_\eta$ dla $\eta < \alpha$, to istnieje też liczba $\aleph_\alpha$. Wynika stąd, że *dla każdej liczby porządkowej α istnieje liczba kardynalna $\aleph_\alpha$*. W samej rzeczy, gdyby dla pewnych liczb porządkowych nie istniały liczby $\aleph_\xi$, to, oznaczając przez α najmniejszą z takich liczb ξ, mielibyśmy $\alpha > 0$ (gdyż istnieje liczba $\aleph_0$), i moglibyśmy powiedzieć, że istnieją wszystkie liczby $\aleph_\eta$ dla $\eta < \alpha$, co, jak dowiedliśmy, pociąga za sobą istnienie liczby $\aleph_\alpha$, wbrew definicji liczby α.

Jeżeli, przy danem α, $\xi \varepsilon Z(\aleph_\alpha)$, to mamy oczywiście $\omega_\alpha \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}$. Lecz łatwo widzieć, że i naodwrót, gdyż jeżeli $\omega_\alpha \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}$ i jeżeli ξ należy do klasy $Z(\aleph_\beta)$, to mamy $\omega_\alpha \leqslant \omega_\beta < \omega_{\alpha+1}$, skąd $\beta = \alpha$. Zatem: *klasa $Z(\aleph_\alpha)$ jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych ξ, spełniających nierówność $\omega_\alpha \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}$*.

§ **98.** Załóżmy teraz, że przy danem α, liczba kardynalna pozaskończona $\mathfrak{m}$ spełnia nierówność $\mathfrak{m} < \aleph_\alpha$. Liczba $\mathfrak{m}$ jest więc mocą

pewnej części C zbioru T wszystkich liczb porządkowych $\xi < \omega_\alpha$ (który jest typu ω_α, a więc mocy $\overline{\omega_\alpha} = \aleph_\alpha$). Lecz każda część zbioru T (jako dobrze uporządkowanego) jest podobna albo samemu zbiorowi T, albo pewnemu jego odcinkowi. Część C nie może jednak być podobną zbiorowi T, gdyż $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{m}$, zaś T jest mocy $\aleph_\alpha > \mathfrak{m}$. Musi więc część C być podobną pewnemu odcinkowi zbioru T, np. wyznaczonemu przez liczbę ξ tego zbioru. Stąd $\overline{C} = \overline{\xi}$, gdyż odcinek wyznaczony przez liczbę ξ w zbiorze T jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych $< \xi$, zatem zbiorem typu ξ. Wobec $\xi \varepsilon T$ oraz definicji zbioru T, mamy $\xi < \omega_\alpha$: jeżeli więc oznaczymy przez $Z(\aleph_\eta)$ klasę, do której należy ξ, to będzie $\eta < \alpha$. Dowiedliśmy więc, że przy pewnem $\eta < \alpha$ będzie $\mathfrak{m} = \overline{C} = \overline{\xi} = \aleph_\eta$.

Udowodniliśmy więc, że *jeżeli dla danej liczby porządkowej α liczba kardynalna pozaskończona $\mathfrak{m}$ spełnia nierówność $\mathfrak{m} < \aleph_\alpha$, to mamy przy pewnej liczbie porządkowej $\eta < \alpha$ równość $\mathfrak{m} = \aleph_\eta$*. Dowodzi to zarazem, że *dla każdej liczby porządkowej α, liczba $\aleph_\alpha$ jest następną liczbą kardynalną po wszystkich liczbach $\aleph_\eta$, gdzie $\eta < \alpha$*, w tem znaczeniu, że niema żadnej liczby kardynalnej większej od każdej z liczb $\aleph_\eta (\eta < \alpha)$, lecz mniejszej od $\aleph_\alpha$.

W szczególności, jeżeli α jest liczbą 1-go rodzaju, zatem $\alpha = \beta + 1$, to nierówność $\eta < \alpha = \beta + 1$ jest równoważna nierówności $\eta \leqslant \beta$, i z twierdzenia naszego wynika, że nierówność $\mathfrak{m} < \aleph_{\beta+1}$ pociąga za sobą nierówność $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_\beta$. Dowodzi to, że *dla każdej liczby porządkowej β, liczba kardynalna $\aleph_{\beta+1}$ jest następną po $\aleph_\beta$*, t. j. *między $\aleph_\beta$ i $\aleph_{\beta+1}$ niema żadnej liczby kardynalnej pośredniej* [1]).

W szczególności więc niema liczby kardynalnej pośredniej między $\aleph_0$ i $\aleph_1$, co udowodniliśmy też bezpośrednio w § 94. Następną liczbą kardynalną po $\aleph_1$ jest, dalej, $\aleph_2$, później następuje $\aleph_3$ i t. d.

Następną liczbą kardynalną po wszystkich liczbach ciągu $\aleph_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest $\aleph_\omega$, następną po niej jest $\aleph_{\omega+1}$ i t. d.

§ 99. Udowodnimy obecnie, że *dla każdej liczby porządkowej α zachodzi wzór*

$$\aleph^2_\alpha = \aleph_\alpha. \qquad (1)$$

Załóżmy, dla dowodu, że dla pewnej liczby porządkowej α wzór (1) nie jest prawdziwy: możemy przytem przypuścić, że α jest najmniejszą

---

[1]) Nie przesądzamy tu, czy prócz $\aleph_{\beta+1}$ nie istnieje jakaś inna liczba kardynalna $\mathfrak{n}$ (nie będąca alefem) o tej własności, że między $\aleph_\beta$ i $\mathfrak{n}$ niema żadnej liczby kardynalnej pośredniej. Wątpliwość ta odpadnie, gdy udowodnimy później zapomocą pewnika Zermelo, że każda liczba kardynalna pozaskończona jest alefem.

z takich liczb. Będzie więc $\alpha > 0$, gdyż dla $\alpha = 0$ wzór (1) jest, jak wiemy, prawdziwy, oraz będzie

$$\aleph_\eta^2 = \aleph_\eta \text{ dla } \eta < \alpha \tag{a}$$

Weźmy pod uwagę zbiór P wszystkich układów (μ, ν), gdzie μ i ν są liczby porządkowe $< \omega_\alpha$. Zaliczmy do zbioru P_λ wszystkie te układy (μ, ν), należące do P, dla których $\mu + \nu = \lambda$.

Powiadam, że będzie

$$P = \sum_{\lambda < \omega_\alpha} P_\lambda. \tag{b}$$

Jeżeli mamy $\mu + \nu = \lambda < \omega_\alpha$, to będzie, jak wiemy (§ 78), $\mu \leqslant \lambda$ oraz $\nu \leqslant \lambda$, skąd $\mu < \omega_\alpha$ oraz $\nu < \omega_\alpha$, zatem $(\mu, \nu) \varepsilon P$. Dla dowodu wzoru (b) wystarczy więc jeszcze okazać, że jeżeli $\mu < \omega_\alpha$, $\nu < \omega_\alpha$, to $\mu + \nu < \omega_\alpha$. Załóżmy więc, że $\mu < \omega_\alpha$, $\nu < \omega_\alpha$. Wobec $\mu < \omega_\alpha$, mamy $\overline{\mu} < \aleph_\alpha$, skąd, jak wiemy (§ 98), wynika, że $\overline{\mu} = \aleph_\eta$, gdzie $\eta < \alpha$. Podobnież, wobec $\nu < \omega_\alpha$ będzie $\overline{\nu} = \aleph_\xi$, gdzie $\xi < \alpha$. Jeżeli teraz oznaczymy przez ζ większą z liczb ξ i η (lub położymy $\zeta = \eta$, jeżeli $\xi = \eta$), to będzie $\overline{\mu} \leqslant \aleph_\zeta$, $\overline{\nu} \leqslant \aleph_\zeta$, przyczem $\zeta < \alpha$. Stąd, wobec (a), znajdujemy $\overline{\mu} + \overline{\nu} \leqslant \aleph_\zeta + \aleph_\zeta = 2 \,.\, \aleph_\zeta \leqslant \aleph^2_\zeta = \aleph_\zeta$, co dowodzi, że dla $\lambda = \mu + \nu$ mamy $\overline{\lambda} \leqslant \aleph_\zeta$ gdzie $\zeta < \alpha$, skąd $\overline{\lambda} < \aleph_\alpha$, czyli $\lambda < \omega_\alpha$, c. b. d. o.

Weźmy teraz pod rozwagę, przy danem $\lambda < \omega_\alpha$, zbiór P_λ, czyli zbiór wszystkich układów (μ, ν), gdzie $\mu + \nu = \lambda$. Przy każdem danem $\mu < \lambda$ istnieje, jak wiadomo (§ 78), jedna i tylko jedna liczba porządkowa ν, taka, iż $\mu + \nu = \lambda$.

Układy, tworzące zbiór P_λ, możemy więc uporządkować według rosnących liczb μ; otrzymany w ten sposób zbiór będzie oczywiście dobrze uporządkowanym, typu $\lambda + 1$ (gdyż na μ możemy przyjmować wszystkie liczby porządkowe, spełniające nierówność $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$).

Uporządkujmy teraz zbiór P, uważając z dwuch układów (μ, ν) oraz (μ', ν') ten jako wcześniejszy, który należy do wcześniejszego składnika P_λ (t. j. daje mniejszą sumę $\mu + \nu$), a jeżeli układy te należą do tego samego składnika P_λ, to pozostawiając dla nich ten stosunek porządkowy, jaki zachodził w zbiorze P_λ, uporządkowanym, jak wyżej. Jasnem jest, że zbiór P zostanie w ten sposób dobrze uporządkowany. Okażemy, że typ jego $\overline{P} = \omega_\alpha$.

Załóżmy, dla dowodu, że $\overline{P} > \omega_\alpha$: istniałby więc odcinek zbioru P, który byłby typu ω_α: niech to będzie odcinek A, wyznaczony przez element (μ_1, ν_1) zbioru P. Wobec $(\mu_1, \nu_1) \varepsilon P$ mamy $\mu_1 + \nu_1 = \lambda_1 < \omega_\alpha$. Łatwo, dalej, widzieć, że dla każdego elementu (μ, ν) odcinka A, jako wcześniejszego od (μ_1, ν_1), będzie $\mu \leqslant \lambda_1$ oraz $\nu \leqslant \lambda_1$. Ponieważ zbiór wszystkich liczb $\mu \leqslant \lambda_1$ jest typu $\lambda' = \lambda_1 + 1$, gdzie $\lambda' < \omega_\alpha$ (wobec $\lambda_1 < \omega_\alpha$), zatem mocy $\overline{\lambda'}$, więc odcinek A jest mocy $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\lambda'} . \overline{\lambda'}$.

Lecz, wobec $\lambda' < \omega_\alpha$ mamy $\overline{\lambda'} < \aleph_\alpha$, co daje, jak wiemy (§ 98), $\overline{\lambda'} = \aleph_\eta$, gdzie $\eta < \alpha$: mamy więc $\overline{\overline{A}} \leqslant \aleph^2_\eta$, zatem, wobec ($a$): $\overline{\overline{A}} \leqslant \aleph_\eta$ i przeto $\overline{\overline{A}} < \aleph_\alpha$, wbrew założeniu, że A jest odcinkiem typu ω_α. Dowiedliśmy więc, że nie może być $\overline{P} > \omega_\alpha$. Z drugiej strony mamy $\overline{P} \geqslant \omega_\alpha$, gdyż układy $(\mu, 0)$, gdzie $\mu < \omega_\alpha$, tworzą oczywiście część zbioru P, będącą typu ω_α. Mamy więc $\overline{P} = \omega_\alpha$, skąd $\overline{\overline{P}} = \aleph_\alpha$.

Z drugiej strony, z definicji zbioru P oraz z definicji iloczynu dwuch liczb kardynalnych wynika natychmiast, że $\overline{\overline{P}} = \aleph^2_\alpha$. Mielibyśmy więc $\aleph^2_\alpha = \aleph_\alpha$, wbrew definicji liczby α. Wzór (1) musi więc być prawdziwy dla każdej liczby porządkowej α, c. b. d. o.

Jako natychmiastowy wniosek ze wzoru (1) otrzymujemy wzór:

$$\aleph_\xi \aleph_\eta = \aleph_\eta \quad \text{dla} \quad \xi \leqslant \eta, \tag{2}$$

gdyż dla $\xi \leqslant \eta$ mamy $\aleph_\xi \leqslant \aleph_\eta$, skąd $\aleph_\xi \aleph_\eta \leqslant \aleph^2_\eta = \aleph_\eta$, a z drugiej strony oczywiście $\aleph_\xi \aleph_\eta \geqslant \aleph_\eta$.

Jako drugi wniosek otrzymujemy ze wzoru (1) wzór:

$$\aleph_\xi + \aleph_\eta = \aleph_\eta \quad \text{dla} \quad \xi \leqslant \eta, \tag{3}$$

gdyż dla $\xi \leqslant \eta$ mamy $\aleph_\xi + \aleph_\eta \leqslant \aleph_\eta + \aleph_\eta = 2\aleph_\eta \leqslant \aleph_\eta \aleph_\eta = \aleph_\eta$, zaś z drugiej strony oczywiście $\aleph_\xi + \aleph_\eta \geqslant \aleph_\eta$.

§ **100.** Ze wzoru (1) wynika, drogą łatwej indukcji, wzór

$$\aleph^n_\alpha = \aleph_\alpha$$

dla każdej liczby porządkowej α i każdej liczby naturalnej n. Warto zauważyć, że jednak mamy już

$$\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0,$$

(gdyż lewa strona $= 2^{\aleph_0}$, § 35). Istnieją atoli liczby kardynalne $\mathfrak{m}$, dla których $\mathfrak{m}^{\aleph_0} = \mathfrak{m}$: taką jest np. liczba $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, gdyż $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0}$.

Co do liczby $\aleph_1$, to, wobec nierówności $2 < \aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ (§ 94), znajdujemy $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1^{\aleph_0} \leqslant (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, skąd

$$\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}; \tag{4}$$

wynika stąd, że pytanie, czy mamy $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$, czy też $\aleph_1^{\aleph_0} > \aleph_1$ jest równoważne pytaniu, czy hipoteza continuum $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ jest prawdziwą, czy też fałszywą.

Zauważymy też, że zachodzi wzór niejako wzajemny względem (4), mianowicie

$$\aleph_0^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}:$$

jest to przypadek szczególny ogólniejszego wzoru

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \quad \text{dla} \quad \alpha \leqslant \beta. \tag{5}$$

W samej rzeczy, dla $\alpha \leqslant \beta$ mamy nierówność $2 < \aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha} \leqslant 2^{\aleph_\beta}$, skąd, wobec (1): $2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant (2^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta^2} = 2^{\aleph_\beta}$, co daje wzór (5).

Zauważymy jeszcze, że nierówność

$$\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0} \tag{6}$$

jest równoważną hipotezie continuum. Z jednej bowiem strony mamy oczywiście $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1$, co, w razie prawdziwości hipotezy continuum, daje, wobec (4), nierówność (6). Z drugiej zaś strony, z nierówności (6) wynika, wobec (4) i uwagi, że $2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$, nierówność $\aleph_2^{\aleph_0} > (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$, która pociąga za sobą nierówność $\aleph_2 > 2^{\aleph_0}$, czyli równość $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Wśród liczb naturalnych istnieje, jak wiadomo, tylko jedna para liczb różnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, spełniająca warunek

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \tag{7}$$

(mianowicie $2^4 = 4^2$). Godnem uwagi jest, że, jak to spostrzegł prof. Banach, *istnieje nieskończenie wiele par liczb kardynalnych* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, *spełniających równość* (7). W samej rzeczy, połóżmy, przy dowolnem danem α, $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ oraz

$$\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{m}} + 2^{2^{\mathfrak{m}}} + 2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}} + \ldots \tag{8}$$

W myśl (1) będziemy mieli

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}, \tag{9}$$

zaś, w myśl (2):

$$\aleph_0 \mathfrak{m} = \mathfrak{m}. \tag{10}$$

Wobec (8) znajdujemy z łatwością

$$2^{\mathfrak{n}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}} . 2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}} \ldots . \leqslant \mathfrak{n} . \mathfrak{n} \ldots . = \mathfrak{n}^{\aleph_0},$$

czyli $2^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0}$, skąd, z uwagi, że $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$, oraz wobec (10):

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} = (2^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{n}^{\aleph_0 \mathfrak{m}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}},$$

czyli

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}. \tag{11}$$

Z drugiej strony, z (8) i (9) wynika z łatwością:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \text{ [1])}, \tag{12}$$

skąd, z uwagi, że $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \geqslant 2^{\mathfrak{n}} > \mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} = (\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{m}} \geqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}},$$

co, wobec (11), daje wzór (7), c. b. d. o.

---

[1]) W samej rzeczy, wobec (9), mamy

$$2^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{m} 2^{\mathfrak{m}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}} . 2^{\mathfrak{m}} = 2^{2\mathfrak{m}} \leqslant 2^{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}. \tag{i}$$

Połóżmy

$$\mathfrak{n}_1 = 2^{\mathfrak{m}}, \quad \mathfrak{n}_{k+1} = 2^{\mathfrak{n}_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

w myśl (i) będzie

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1$$

oraz

$$\mathfrak{n}_1 \leqslant \mathfrak{m} + \mathfrak{n}_1 \leqslant \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_1 = 2\,\mathfrak{n}_1 \leqslant \mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1,$$

skąd

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1.$$

Przypuśćmy, że przy pewnem k mamy

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n}_k = \mathfrak{m}\mathfrak{n}_k = \mathfrak{n}_k . \tag{ii}$$

Stąd

$$\mathfrak{n}_{k+1} \leqslant \mathfrak{m}\mathfrak{n}_{k+1} = \mathfrak{m}\, 2^{\mathfrak{n}_k} \leqslant 2^{\mathfrak{m}} . 2^{\mathfrak{n}_k} = 2^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}_k} = 2^{\mathfrak{n}_k} = \mathfrak{n}_{k+1},$$

$$\mathfrak{n}_{k+1} \leqslant \mathfrak{m} + \mathfrak{n}_{k+1} \leqslant \mathfrak{n}_{k+1} + \mathfrak{n}_{k+1} = 2\,\mathfrak{n}_{k+1} \leqslant \mathfrak{m}\mathfrak{n}_{k+1} \leqslant \mathfrak{n}_{k+1},$$

co daje

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n}_{k+1} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}_{k+1} = \mathfrak{n}_{k+1}$$

i dowodzi prawdziwości wzoru (ii) dla $k+1$. Stąd, przez indukcję, wnosimy o prawdziwości wzoru (ii) przy wszelkiem naturalnem k.

Wzór (ii) daje, z uwagi, że, wobec (8), $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3 + \ldots .$:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{m}\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{m}\mathfrak{n}_3 + \ldots = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \ldots = \mathfrak{n},$$

czyli $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, c. b. d. o.

W szczególności np. dla $\mathfrak{m} = \aleph_0$, $\mathfrak{n} = 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + 2^{2^{2^{\aleph_0}}} + \ldots$, wzór (7) daje:

$$\aleph_0^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{\aleph_0}.$$

Możnaby stąd wyprowadzić wniosek (zapomocą pewnika Zermelo), że zbiór mocy $\mathfrak{n}$ posiada tyleż części przeliczalnych, co i wszystkich części.

§ **101.** Niech α i $\beta < \alpha$ będą dwie dane liczby porządkowe, A — dany zbiór mocy $\aleph_\alpha$, B — dana część jego mocy $\aleph_\beta$, i połóżmy $C = A - B$. Zbiór A, jako mocy $\aleph_\alpha$, jest równej mocy ze zbiorem dobrze uporządkowanym D typu ω_α: część C zbioru A będzie więc równej mocy z pewną częścią zbioru D, zatem ze zbiorem dobrze uporządkowanym typu $\leqslant \omega_\alpha$. Wnosimy stąd, że $\overline{\overline{C}} = \aleph_\gamma$, gdzie $\gamma \leqslant \alpha$.

Wobec $C = A - B$, $B \subset A$, mamy $A = B + C$, $BC = 0$, skąd

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}, \text{ czyli } \aleph_\alpha = \aleph_\beta + \aleph_\gamma. \tag{13}$$

Gdyby było $\gamma \leqslant \beta$, mielibyśmy, wobec wzoru (3) z § 99: $\aleph_\beta + \aleph_\gamma = \aleph_\beta$ i wzór (13) dałby: $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$, co niemożliwe, skoro, jak zakładamy, $\beta < \alpha$. Musi więc być $\gamma > \beta$, wobec czego wzór (3) daje: $\aleph_\beta + \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$ skąd, wobec (13): $\aleph_\alpha = \aleph_\gamma$, co daje $\overline{\overline{C}} = \aleph_\alpha$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli od zbioru mocy $\aleph_\alpha$ odejmiemy zbiór mocy $\aleph_\beta$, gdzie $\beta < \alpha$, to pozostały zbiór będzie mocy $\aleph_\alpha$. Własność tę możemy wyrazić wzorem:

$$\aleph_\alpha - \aleph_\beta = \aleph_\alpha, \text{ dla } \alpha > \beta. \tag{14}$$

Moc zbioru nieskończonego dobrze uporządkowanego nie ulega więc zmianie, jeżeli od niego odejmiemy zbiór mocy mniejszej.

Jako zastosowanie wzoru (14) obliczmy moc zbioru wszystkich liczb porządkowych, tworzących klasę $Z(\aleph_\alpha)$. W § 97 dowiedliśmy, że klasa $Z(\aleph_\alpha)$ jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych ξ, spełniających nierówność $\omega_\alpha \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1}$. Ponieważ zbiór ten otrzymamy, odejmując od zbioru wszystkich liczb $\xi < \omega_{\alpha+1}$, który jest mocy $\overline{\omega}_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}$, zbiór wszystkich liczb $\xi < \omega_\alpha$, który jest mocy $\aleph_\alpha$, więc mocą zbioru $Z(\aleph_\alpha)$ będzie, w myśl (14):

$$\aleph_{\alpha+1} - \aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+1}$$

Dowiedliśmy więc, że, przy wszelkiem α, *klasa* $Z(\aleph_\alpha)$ *ma moc* $\aleph_{\alpha+1}$.

Zbiór S wszystkich liczb porządkowych $\xi < \omega_\alpha$ jest oczywiście sumą

$$S = S_0 + \sum_{\xi < \alpha} Z(\aleph_\xi), \tag{15}$$

gdzie S_0 oznacza zbiór wszystkich liczb klasy pierwszej (t. j. liczb $\xi < \omega$). Z uwagi, że składniki sumy (15) są rozłączne, dalej, że, jak dowiedliśmy przed chwilą, $Z(\aleph_\xi)$ ma moc $\aleph_{\xi+1}$, wreszcie, że $\overline{S}_0 = \aleph_0$, $\overline{S} = \aleph_\alpha$, wzór (15) daje:

$$\aleph_\alpha = \aleph_0 + \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\xi+1} \tag{16}$$

W razie, gdy α jest liczbą 2-go rodzaju, wzór (16) daje, jak łatwo widzieć:

$$\aleph_\alpha = \aleph_0 + \aleph_1 + \ldots + \aleph_\omega + \ldots + \aleph_\xi + \ldots (\xi < \alpha) \tag{17}$$

W szczególności, dla $\alpha = \omega$ mamy:

$$\aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \ldots . \tag{18}$$

W § 58 dowiedliśmy, że jeżeli continuum rozbijemy na przeliczalną mnogość części, to jedna conajmniej z nich musi być mocy continuum. Wynika stąd natychmiast, że liczba $2^{\aleph_0}$ nie może być sumą szeregu typu ω liczb kardynalnych rosnących. Ponieważ zaś liczba $\aleph_\omega$, w myśl (18), jest taką właśnie sumą, więc mamy (König):

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega.$$

§ **102.** Niech α oznacza daną liczbę porządkową 2-go rodzaju, $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\alpha}$ dany ciąg pozaskończony rosnący liczb porządkowych, zmierzający do α, czyli

$$\lim_{\xi<\alpha} \alpha_\xi = \alpha \tag{19}$$

Powiadam, że będzie

$$\omega_\alpha = \lim_{\xi<\alpha} \omega_{\alpha_\xi} \tag{20}$$

Dla dowodu wzoru (20) zauważymy przedewszystkiem, że zachodzi nierówność

$$\omega_\alpha > \omega_{\alpha_\xi} \quad \text{dla } \xi < \alpha,$$

gdyż, wobec (19), mamy $\alpha > \alpha_\xi$ dla $\xi < \alpha$. Liczba ω_ξ jest więc większą od każdego z wyrazów ciągu $\{\omega_{\alpha_\xi}\}_{\xi<\alpha}$. Z drugiej strony łatwo widzieć, że liczba ω_α jest najmniejszą z liczb porządkowych, większych od każdego z wyrazów uważanego ciągu. Jeżeli bowiem mamy $\varphi < \omega_\alpha$, to będzie $\overline{\varphi} < \aleph_\alpha$, gdyż ω_α jest najmniejszą liczbą porządkową o mocy $\aleph_\alpha$. Wobec $\overline{\varphi} < \aleph_\alpha$ mamy atoli $\overline{\varphi} = \aleph_\eta$, przy pewnem $\eta < \alpha$ (§ 98). Stąd, wobec (19), będzie, dla dostatecznie wielkich $\mu < \alpha$: $\alpha_\mu > \eta$,

zatem $\aleph_{\alpha_\mu} > \aleph_\eta$, i przeto $\omega_{\alpha_\mu} > \psi$, co dowodzi, że liczba ψ nie może być większą od każdego z wyrazów ciągu $\{\omega_{\alpha_\xi}\}_{\xi<\alpha}$.

Wobec definicji granicy ciągu pozaskończonego liczb porządkowych (§ 82) wnosimy więc o równości (20).

Dowiedliśmy więc, że granica każdego ciągu pozaskończonego rosnącego liczb początkowych jest liczbą początkową.

W szczególności mamy np.

$$\omega_\omega = \lim_{n<\omega} \omega_n,$$

co dowodzi, że liczba ω_ω jest granicą ciągu przeliczalnego (typu ω) liczb od niej mniejszych. Natomiast liczba $\omega_1 = \Omega$ nie jest granicą żadnego ciągu typu ω liczb od niej mniejszych, gdyż liczby takie należałyby do klasy 1-szej lub 2-giej, a, jak dowiedliśmy w § 93, granica każdego ciągu typu ω liczb klasy 1-szej lub 2-giej jest liczbą klasy 2-giej, zatem mniejszą od Ω.

Liczby początkowe ω_α, które są granicami ciągów pozaskończonych typu $< \omega_\alpha$, nazywamy *osobliwemi;* wszystkie inne liczby początkowe (t. j. takie liczby ω_α, które nie są granicami żadnych ciągów pozaskończonych typu $< \omega_\alpha$) nazywamy *regularnemi.*

Więc np. liczba $\omega_1 = \Omega$ jest regularną, liczba ω_ω — osobliwą (jako granica ciągu typu $\omega < \omega_\omega$). Podobnież liczba ω_{ω^ω} jest osobliwą, jako granica ciągu typu ω, gdyż mamy

$$\omega_{\omega^\omega} = \lim_{n<\omega} \omega_{\omega^n}.$$

Liczba $\omega_{\omega_1} = \omega_\Omega$ również jest osobliwą, gdyż mamy

$$\omega_\Omega = \lim_{\xi<\Omega} \omega_\xi, \text{ przyczem } \Omega = \omega_1 < \omega_\Omega.$$

Możnaby z łatwością udowodnić, że jeżeli α jest liczbą 1-go rodzaju, to liczba ω_α jest regularną. Natomiast nie znamy żadnej liczby regularnej ω_α, której wskaźnik α byłby liczbą 2-go rodzaju, jakkolwiek z drugiej strony nie wiemy, czy każda taka liczba musi być osobliwą. Wiemy tylko, że każda liczba regularna ω_α, której wskaźnik α byłby 2-go rodzaju, musiałaby spełniać warunek

$$\omega_\alpha = \alpha. \qquad (21)$$

Dla każdej bowiem liczby porządkowej α mamy, jak łatwo widzieć: $\omega_\alpha \geqslant \alpha$ (gdyż zbiór wszystkich liczb $\alpha < \omega_\alpha$ zawiera podzbiór $\{\omega_\xi\}_{\xi<\alpha}$ typu α); jeżeli więc α jest 2-go rodzaju i $\omega_\alpha > \alpha$, to, wobec $\omega_\alpha = \lim\limits_{\xi<\alpha} \omega_\xi$ wnosimy, że liczba ω_α jest osobliwą.

Godnem uwagi jest, że istnieją liczby początkowe, spełniające warunek (21), t. j. równe swoim wskaźnikom. W samej rzeczy, połóżmy

$$\varphi_1 = \omega_1, \text{ zaś } \varphi_n = \omega_{\varphi_{n-1}} \text{ dla } n = 2, 3, 4, \ldots \qquad (22)$$

Mamy stąd $\varphi_2 = \omega_{\omega_1} > \omega_1 = \varphi_1$, czyli $\varphi_2 > \varphi_1$. Załóżmy, że $\varphi_n > \varphi_{n-1}$. Mielibyśmy stąd $\omega_{\varphi_n} > \omega_{\varphi_{n-1}}$ czyli $\varphi_{n+1} > \varphi_n$, skąd przez indukcję wnosimy, że ciąg φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest rosnący. Połóżmy

$$\alpha = \lim_{n<\omega} \varphi_n:$$

będzie stąd, wobec (22):

$$\omega_\alpha = \lim_{n<\omega} \omega_{\varphi_n} = \lim_{n<\omega} \varphi_{n+1} = \lim_{n<\omega} \varphi_n = \alpha,$$

co daje wzór (21). Liczba ω_α atoli nie jest regularną (jako granica ciągu typu $\omega < \omega_\alpha$). Możnaby z łatwością dowieść, że określona przez nas liczba ω_α jest najmniejszą liczbą początkową, spełniającą równanie (21). Jeżeli bowiem $\omega_\beta = \beta$, to mamy $\omega_\beta > \omega_1 = \varphi_1$, zaś z założenia $\omega_\beta > \varphi_n$ wynika $\omega_{\omega_\beta} > \omega_{\varphi_n}$, czyli $\omega_\beta > \varphi_{n+1}$, skąd $\omega_\beta > \varphi_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, zatem $\omega_\beta \geqslant \omega_\alpha$.

ROZDZIAŁ XII.

Twierdzenie Zermelo i jego zastosowania.

§ **103.** Niech M oznacza daną mnogość nie pustą. Weźmy pod rozwagę wszystkie zbiory dobrze uporządkowane, których elementami są różne elementy mnogości M. Zbiory te podzielmy na klasy, zaliczając do tej samej klasy dwa zbiory wtedy i tylko wtedy, jeżeli są podobne: każdej klasie będzie więc odpowiadała pewna liczba porządkowa. Zbiór Z, otrzymanych w ten sposób klas K, włączając i klasę pustą, możemy, dalej, uporządkować, uważając z dwuch różnych klas K_1 i K_2 tę za wcześniejszą, której odpowiada mniejsza liczba porządkowa. Jasnem jest, że zbiór Z zostanie w ten sposób dobrze uporządkowany: niech ζ oznacza jego typ.

Niech K oznacza daną klasę, należącą do zbioru Z, α — odpowiadającą tej klasie liczbę porządkową, M_1 — część dobrze uporządkowaną zbioru M, zaliczoną do klasy K. Zbiór M_1 będzie więc typu α. Dla każdej liczby porządkowej $\xi < \alpha$ będzie istniał odcinek zbioru M_1, będący typu ξ: odcinek ten będzie oczywiście należał do pewnej klasy, należącej do Z, mianowicie do tej, której odpowiada liczba ξ. Dla każdej liczby porządkowej $\xi < \alpha$ istnieje więc należąca do Z klasa zbiorów typu ξ, która jest w zbiorze Z wcześniejszą od klasy K. Z drugiej strony, każdej klasie, należącej do Z i wcześniejszej od K, odpowiada oczywiście pewna liczba porządkowa $< \alpha$. Wynika stąd, że klasa K wyznacza w zbiorze Z odcinek typu α (gdyż zbiór wszystkich liczb porządkowych $\xi < \alpha$ jest typu α).

Niech teraz α oznacza jakąkolwiek daną liczbę porządkową $< \zeta$. W zbiorze Z, który jest typu ζ, istnieje więc odcinek typu α: niech K oznacza klasę, należącą do zbioru Z i wyznaczającą w tym zbiorze

odcinek typu α: z tego cośmy dowiedli przed chwilą wynika, że klasie K odpowiada liczba α. Każda liczba porządkowa $< \zeta$ odpowiada więc pewnej klasie, należącej do Z. Wynika stąd też, że dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \zeta$ istnieje zbiór typu α, którego elementami są różne elementy mnogości M.

Okażemy teraz, że nie może być $\bar{\zeta} \leqslant \overline{\overline{M}}$. Załóżmy, dla dowodu, że $\bar{\zeta} \leqslant \overline{\overline{M}}$. Zbiór Z byłby więc równej mocy z pewną częścią M_1 mnogości M: zbiór M_1, jako obraz wzajemnie-jednoznaczny zbioru dobrze uporządkowanego Z, byłby sam dobrze uporządkowany, typu $\bar{Z} = \zeta$, a więc (jako złożony z różnych elementów mnogości M) należałby do pewnej klasy K (której odpowiada liczba ζ). Wyznaczony przez tę klasę odcinek zbioru Z byłby (jak dowiedliśmy wyżej) typu ζ, zatem podobny całemu zbiorowi Z, co, jak wiemy, jest niemożliwe.

Dowiedliśmy więc, że zbiór Z nie jest mocy mniejszej od mocy mnogości M, ani też równej mocy z tą mnogością. Nie możemy atoli jeszcze twierdzić, że zbiór Z jest mocy większej od mocy mnogości M, gdyż nie udowodniliśmy jeszcze trichotomji. Zauważymy jednak, że z trichotomji wynikałoby, że $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{Z}}$, zatem, że M jest równej mocy z pewną częścią zbioru Z i przeto, że M jest równej mocy z pewnym zbiorem dobrze uporządkowanym. Ponieważ co do samej mnogości M nie robiliśmy żadnych założeń, więc dowiedliśmy (nie odwołując się do pewnika Zermelo), że *z trichotomji wynika, iż każda mnogość jest równej mocy z pewną mnogością dobrze uporządkowaną.*

Dowiedliśmy również, bez pomocy pewnika wyboru, że dla każdej mnogości M można zbudować przykład efektywny zbioru dobrze uporządkowanego, którego moc nie jest równą ani mniejszą od mocy mnogości M. Zauważymy jeszcze, że możnaby dla każdej mnogości M zbudować przykład efektywny zbioru dobrze uporządkowanego, o którego mocy możnaby dowieść bez pomocy pewnika Zermelo, że nie jest ani mniejszą, ani większą od mocy mnogości M.

Określimy w tym celu zbiór Z_1 jak następuje. Jeżeli istnieją odcinki zbioru Z, których moc nie jest mniejszą od mocy mnogości M, to istnieje, jak wiemy, wśród nich najmniejszy: oznaczmy go przez Z_1. Jeżeli takich odcinków zbioru Z niema, to oznaczmy przez Z_1 sam zbiór Z. Z definicji zbioru Z_1 oraz z uwagi, że nie jest $\overline{\overline{Z}} \leqslant \overline{\overline{M}}$, wynika bezpośrednio, że moc zbioru Z_1 nie jest mniejszą od mocy mnogości M, oraz że każdy odcinek zbioru Z_1 ma moc mniejszą od $\overline{\overline{M}}$. Z drugiej strony łatwo widzieć, że nie może być $\overline{\overline{Z}}_1 > \overline{\overline{M}}$,

gdyż w takim razie mnogość M byłaby równej mocy z pewną częścią zbioru dobrze uporządkowanego Z_1, i przeto, nie mogąc być równej mocy z samym zbiorem Z_1, byłaby równej mocy z pewnym jego odcinkiem, co niemożliwe, skoro każdy odcinek zbioru Z_1 ma moc $< \overline{\overline{M}}$. Moc zbioru dobrze uporządkowanego Z_1 nie jest więc ani mniejszą, ani większą od mocy mnogości M, c. b. d. o.

§ **104.** Zachowując oznaczenia § poprzedzającego okażemy obecnie, opierając się na pewniku Zermelo, że dla pewnej liczby porządkowej $\alpha < \zeta$ mamy $\overline{\alpha} = \overline{\overline{M}}$.

Załóżmy, dla dowodu, że mamy $\overline{\alpha} \neq \overline{\overline{M}}$ dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \zeta$.

Z pewnika Zermelo wynika, jak wiadomo, (§ 59), że istnieje prawo, w myśl którego każdej części nie pustej C mnogości M odpowiada pewien element $\varphi(C)$ tej części.

Połóżmy $a_0 = \varphi(M)$. Niech, dalej, α oznacza jakąkolwiek daną liczbę porządkową $< \zeta$ i przypuśćmy, żeśmy określili już wszystkie wyrazy a_ξ, dla $\xi < \alpha$, jako pewne elementy mnogości M: zbiór ich oznaczmy przez M_α. Będzie oczywiście $\overline{\overline{M_\alpha}} = \overline{\alpha}$, zatem wobec założenia, że $\overline{\alpha} \neq \overline{\overline{M}}$, dla $\alpha < \zeta$, będziemy mieli $\overline{\overline{M_\alpha}} \neq \overline{\overline{M}}$, skąd wynika, wobec $M_\alpha \subset M$, że zbiór $M - M_\alpha$ nie jest pusty. Położymy $a_\alpha = \varphi(M - M_\alpha)$: będzie to więc pewien element mnogości M, różny od każdego z elementów zbioru M_α. W ten sposób, przez indukcję pozaskończoną, każdej liczbie porządkowej $\alpha < \zeta$ został przyporządkowany pewien element a_α mnogości M, przytem różnym liczbom różne elementy. Zbiór M_ζ wszystkich elementów a_α, dla $\alpha < \zeta$, jest więc pewną częścią mocy $\overline{\zeta}$ zbioru M, skąd wynika, że $\overline{\zeta} \leqslant \overline{\overline{M}}$, gdy tymczasem w § 103 dowiedliśmy, że nierówność ta zachodzić nie może. Założenie, że mamy $\overline{\alpha} \neq \overline{\overline{M}}$ dla $\alpha < \zeta$, doprowadza więc do sprzeczności.

Dowiedliśmy więc, że istnieje liczba porządkowa $\alpha < \zeta$, taka, iż $\overline{\alpha} = \overline{\overline{M}}$. Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest mocą pewnego zbioru dobrze uporządkowanego D (zbioru wszystkich liczb porządkowych $\xi < \alpha$), więc dowiedliśmy, że mnogość M jest równej mocy z pewnym zbiorem dobrze uporządkowanym. Istnieje więc odwzorowanie wzajemnie-jednoznaczne mnogości M na zbiorze dobrze uporządkowanym D, które zarazem porządkuje dobrze mnogość M. Udowodniliśmy więc, przy pomocy pewnika Zermelo, następujące

Twierdzenie Zermelo: Każda mnogość może być uważaną jako zbiór elementów pewnej mnogości dobrze uporządkowanej.

Twierdzenie to możnaby jeszcze wyrazić, mówiąc, że *każda mnogość jest równej mocy z pewną mnogością dobrze uporządkowaną.* Niektórzy autorowie, idąc za Zermelo [1]), wyrażają jego twierdzenie, mówiąc, że *każda mnogość może być dobrze uporządkowana* [2]). Chodzi tu naturalnie o „możliwość“ w znaczeniu idealnem (por. § 45), nie każdą bowiem mnogość *potrafimy* dobrze uporządkować: nie potrafimy np. dobrze uporządkować mnogości wszystkich liczb rzeczywistych. Wielu mnogości nie potrafimy nietylko *dobrze* uporządkować, ale nawet wogóle *uporządkować:* taką jest np. mnogość wszystkich funkcyj zmiennej rzeczywistej, podobniez mnogość wszystkich części przeliczalnych zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Twierdzenie Zermelo stwierdza tylko *istnienie* (w sensie idealistów) dobrego uporządkowania każdej mnogości, nie przesądzając możliwości efektywnego określenia takiego uporządkowania w każdym poszczególnym przypadku. Możnaby z łatwością dowieść, że daną mnogość M potrafimy efektywnie dobrze uporządkować, jeżeli potrafimy efektywnie ustalić prawo, w myśl którego każdej części nie pustej mnogości M odpowiada pewien element tej części. Potrafilibyśmy więc np. dobrze uporządkować zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdybyśmy potrafili każdemu zbiorowi nie pustemu liczb rzeczywistych przyporządkować pewną liczbę tego zbioru.

§ **105.** W poprzednim §, opierając się na pewniku Zermelo, dowiedliśmy twierdzenia Zermelo. Godnem uwagi jest jednak, że i naodwrót: z twierdzenia Zermelo wynika prawdziwość pewnika Zermelo.

W samej rzeczy, niech M oznacza daną mnogość, której elementami są zbiory nie puste Z, nie posiadające elementów wspólnych. Oznaczmy przez S sumę wszystkich zbiorów Z, tworzących mnogość M. W myśl twierdzenia Zermelo, mnogość S może być uważana jako zbiór elementów pewnej mnogości dobrze uporządkowanej D. Każdy zbiór Z, należący do M, jako część mnogości S, jest zarazem częścią mnogości D: oznaczmy przez $\varphi(Z)$ pierwszy z elementów mnogości D, należących do Z. Mnogość N wszystkich elementów $\varphi(Z)$, odpowiadających zbiorom Z, należącym do M, będzie oczywiście zawierała po jednym i tylko jednym elemencie z każdego z tych zbiorów.

---

[1]) E. Zermelo: Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.* 59 (1904); Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.* 65 (1908).

[2]) Np. F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Lipsk 1914, str. 133.

Pewnik wyboru i twierdzenie Zermelo są więc równoważne. Okażemy jeszcze, że równoważną im jest też trichotomja.

W § 103 dowiedliśmy (bez pomocy pewnika wyboru), że z trichotomji wynika twierdzenie Zermelo. Należy więc jeszcze okazać, że z twierdzenia Zermelo wynika trichotomja. W tym celu wystarcza tylko zauważyć, że trichotomja zachodzi dla mnogości dobrze uporządkowanych.

Tak więc *pewnik wyboru, twierdzenie Zermelo i trichotomja są równoważne* [1]).

§ **106.** Z twierdzenia Zermelo wynika bezpośrednio (wobec definicji alefów, § 96), że *każda liczba kardynalna jest alefem.* Wobec wzorów na sumy, iloczyny, potęgi i różnice alefów, wyprowadzonych w §§ 99—101, otrzymujemy więc dla wszelkich liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ wzory:

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\mathfrak{n}=\mathfrak{n}, \quad \text{dla} \quad \mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}\geqslant\aleph_0,$$

$$\mathfrak{m}^n=\mathfrak{m}, \quad \text{dla} \quad \mathfrak{m}\geqslant\aleph_0, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=\mathfrak{m}, \quad \text{dla} \quad \mathfrak{m}>\mathfrak{n},\ \mathfrak{m}\geqslant\aleph_0,$$

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}=2^{\mathfrak{n}}, \quad \text{dla} \quad \mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}\geqslant\aleph_0.$$

Z pierwszego z tych wzorów wynika natychmiast, że żadna liczba kardynalna, która nie jest skończona, nie może być sumą dwuch liczb kardynalnych od niej mniejszych. To ostatnie twierdzenie wynika więc z trichotomji. Z drugiej strony, w § 42 zauważyliśmy za p. Leśniewskim, że z twierdzenia tego wynika (bez pomocy pewnika wyboru) trichotomja. Twierdzenie, że żaden zbiór, który nie jest skończony, nie jest sumą dwuch zbiorów o mniejszych od niego mocach, jest więc równoważne trichotomji (a przez to i pewnikowi Zermelo).

Zauważymy, dalej, że z twierdzenia o mnożeniu liczb kardynalnych wynika z łatwością twierdzenie, że jeżeli M jest daną mnogością nieskończoną punktów w płaszczyźnie, to jeden conajmniej z dwuch rzutów prostokątnych mnogości M na osi spółrzędnych jest równej mocy z mnogością M.

Wyprowadzimy jeszcze twierdzenie o dodawaniu i mnożeniu nierówności dla liczb kardynalnych. Załóżmy, że dla liczb kardynalnych pozaskończonych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1$ i $\mathfrak{n}_1$ zachodzą nierówności

$$\mathfrak{m}<\mathfrak{n} \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{m}_1<\mathfrak{n}_1 \tag{1}$$

---

[1]) Udowodnił to F. Hartogs w r. 1915 (*Math. Ann.* 76, p. 442).

i przypuśćmy np. że $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}_1$. W myśl wyprowadzonych wyżej wzorów dla sumy i iloczynu liczb kardynalnych, będziemy mieli

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1, \quad \mathfrak{n} + \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}\mathfrak{n}_1 \geqslant \mathfrak{n}_1,$$

skąd, wobec $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{n}_1$:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{n} + \mathfrak{n}_1 \text{ oraz } \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{n}\mathfrak{n}_1. \tag{2}$$

Nierówności (1) pociągają więc za sobą zawsze nierówności (2), podobnie, jak dla liczb skończonych.

Z trichotomji wynika, że każda mnogość nieprzeliczalna zawiera podmnogość mocy $\aleph_1$. W samej rzeczy, niech $\aleph$ oznacza moc danej mnogości nieprzeliczalnej: z własności liczby $\aleph_1$, udowodnionej w § 94, wynika, że nie może być $\aleph < \aleph_1$ (gdyż wówczas byłoby $\aleph \leqslant \aleph_0$ i mnogość nasza byłaby skończoną lub przeliczalną, wbrew założeniu); z trichotomji wynika więc, że musi być $\aleph \geqslant \aleph_1$, co dowodzi, że mnogość nasza zawiera podmnogość mocy $\aleph_1$, c. b. d. o.

§ **107.** Wyprowadzimy teraz z twierdzenia Zermelo pewne wnioski, dotyczące mnogości uporządkowanych.

Niech U oznacza daną mnogość uporządkowaną, a — dany jej element. Element a nazywamy elementem *lewostronnie granicznym,* jeżeli wyznaczony przez niego odcinek mnogości U nie jest pusty i nie posiada elementu ostatniego. Podobnież nazywamy a elementem *prawostronnie granicznym,* jeżeli zbiór wszystkich elementów mnogości M, późniejszych od a, nie jest pusty i nie posiada elementu pierwszego.

Twierdzenie. Każdy element lewostronnie graniczny mnogości uporządkowanej jest granicą pewnego ciągu pozaskończonego rosnącego elementów uważanej mnogości (to znaczy: jest pierwszym elementem, późniejszym od każdego z elementów pewnego zbioru dobrze uporządkowanego, będącego częścią uważanej mnogości uporządkowanej).

Dowód. Niech U oznacza daną mnogość uporządkowaną, a—dany jej element, A — odcinek mnogości U, wyznaczony przez element a. Z twierdzenia Zermelo wynika, że istnieje ciąg pozaskończony $C = \left\{a_\xi\right\}_{\xi < \alpha}$, taki iż każdy element zbioru A jest jednym z wyrazów tego ciągu i naodwrót, każdy wyraz ciągu C jest elementem zbioru A. Uporządkowanie elementów zbioru A w mnogości U może naturalnie być inne niż według wielkości wskaźników w ciągu C.

Oznaczmy, dalej, przez Z zbiór, utworzony z pierwszego wyrazu a_0 ciągu C oraz ze wszystkich tych wyrazów a_η ciągu C, które spełniają warunek

$$a_\xi \prec a_\eta \text{ (w mnogości } U\text{), dla } \xi < \eta.$$

Możemy oczywiście położyć $Z = \{a_{\alpha_\xi}\}_{\xi<\varphi}$, przyczem, jak łatwo widzieć, będzie

$$a_{\alpha_\xi} \prec a_{\alpha_\eta} \text{ (w mnogości } U\text{), dla } \xi < \eta.$$

Ciąg Z będzie więc rosnącym. Jasnem jest, że ciąg Z nie posiada elementu ostatniego (czyli, że typ jego φ jest liczbą 2-go rodzaju), bowiem ostatni element tego ciągu byłby zarazem oczywiście ostatnim elementem zbioru A, wbrew założeniu, że a jest elementem lewostronnie granicznym. Z definicji ciągu Z i zbioru A wynika dalej, że każdy element ciągu Z jest w mnogości U wcześniejszy od a.

Dla dowodu naszego twierdzenia wystarczy więc już tylko okazać, że żaden element b mnogości U, wcześniejszy od a, nie może być późniejszym od każdego z wyrazów ciągu Z. Przypuśćmy więc, że b jest elementem mnogości U, wcześniejszym od a. Mamy więc $b \varepsilon A$ i przeto b jest jednym z wyrazów ciągu C, np. $b = a_\beta$. Jeżeli $b = a_\beta$ nie jest żadnym z wyrazów ciągu Z, to z definicji tego ciągu wynika, że istnieje takie $\zeta < \beta$, iż $a_\zeta \succ a_\beta$ (w mnogości U) przyczem jasnem jest, że jeżeli η oznacza najmniejszy z takich właśnie wskaźników ζ, to a_η będzie wyrazem ciągu Z (gdyż będzie $a_\eta \succ a_\beta$, zaś $a_\xi \prec a_\beta$ dla $\xi < \eta$, skąd $a_\xi \prec a_\eta$ dla $\xi < \eta$). Zatem element b jest albo jednym z wyrazów ciągu Z, albo też jest wcześniejszy (w mnogości U) od pewnego wyrazu tego ciągu.

Udowodniliśmy więc, że a jest pierwszym elementem mnogości U, późniejszym od każdego z wyrazów ciągu Z. Twierdzenie nasze zostało więc dowiedzione.

Jeżeli, dla danego elementu lewostronnie granicznego a danej mnogości uporządkowanej U, α jest najmniejszym typem ciągu pozaskończonego rosnącego elementów mnogości U, którego granicą jest a, to α nazywamy *lewostronnym charakterem* elementu a.

Jeżeli element a nie jest lewostronnie granicznym w mnogości U, to przez lewostronny charakter jego rozumiemy liczbę 0, jeżeli a jest pierwszym elementem mnogości U, oraz liczbę 1, jeżeli a posiada element poprzedni. W ten sposób każdy element mnogości uporządkowanej ma oznaczony w zupełności lewostronny charakter, będący pe-

wną liczbą porządkową (przyczem możnaby dowieść, że jest to liczba 0, 1, lub liczba początkowa regularna). Jeżeli β jest lewostronnym charakterem elementu a w mnogości U^* (uporządkowanej odwrotnie względem U), to typ β^* nazywamy *prawostronnym charakterem* elementu a w mnogości M. Układ (α, β^*) nazywamy, według Hausdorffa *charakterem* elementu a w mnogości U. Więc np. w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, uporządkowanym według wielkości, każdy element ma charakter (ω, ω^*); w zbiorze wszystkich liczb całkowitych, uporządkowanym według ich wielkości względnych, każdy element ma charakter $(1, 1)$. W zbiorze wszystkich liczb porządkowych 1-szej i 2-giej klasy każda liczba 2-go rodzaju jest elementem o charakterze $(\omega, 1)$.

Podobnież można przypisywać charaktery lukom danej mnogości uporządkowanej. Jeżeli dany przekrój $[A, B]$ mnogości uporządkowanej U wyznacza lukę, to przez charakter (α, β^*) tej luki rozumiemy charakter elementu, któryby zapełniał tę lukę (t. j. elementu, dołączoczonego do mnogości U, który należałoby uważać jako późniejszy od każdego elementu klasy A, zaś jako wcześniejszy od każdego elementu klasy B). Więc np. w zbiorze wszystkich liczb wymiernych, uporządkowanym według wielkości, każda luka ma charakter (ω, ω^*). W zbiorze typu $\Omega+\Omega^*$ jedyna luka tego zbioru ma charakter (Ω, Ω^*).

§ **108.** Zastosujemy obecnie twierdzenie Zermelo do dowodu istnienia tak zwanej *bazy hamelowskiej* wszystkich liczb rzeczywistych [1]).

Z twierdzenia Zermelo wynika, że istnieje zbiór dobrze uporządkowany

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1} \ldots, x_\alpha, \ldots, \quad (\alpha < \varphi) \tag{1}$$

utworzony ze wszystkich liczb rzeczywistych $\neq 0$.

Utworzymy teraz zbiór B liczb rzeczywistych, zaliczając do niego liczbę x_0 oraz każdy wyraz x_α ciągu (1), mający tę własność, że nie istnieje żaden ciąg skończony $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ liczb porządkowych $< \alpha$ oraz żaden ciąg liczb wymiernych $w_1, w_2, \ldots, w_n$, takie iż

$$x_\alpha = w_1 x_{\alpha_1} + w_2 x_{\alpha_2} + \ldots + w_n x_{\alpha_n}. \tag{2}$$

Z definicji zbioru B wynika, że dla żadnego ciągu skończonego

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

różnych liczb, należących do B, nie może zachodzić wzór

$$w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_n b_n = 0,$$

[1]) G. Hamel: *Math. Ann.* 60 (1905), str. 459 i nast.

gdzie $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są liczby wymierne $\neq 0$. W samej rzeczy, zakładając, że wzór taki zachodzi i że liczby b_i wypisane są w nim w tym porządku, w jakim występują w ciągu (1), mielibyśmy

$$b_n = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \ldots + v_{n-1} b_{n+1},$$

gdzie $v_i = -\frac{w_i}{w_n}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, co niemożliwe, gdyż b_n należy do B, zaś liczby $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ są w ciągu (1) wcześniejsze od b_n, przyczem współczynniki v_i są wymierne.

Wynika stąd natychmiast, że każda liczba rzeczywista x daje się conajwyżej w jeden tylko sposób przedstawić w postaci

$$x = w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_m b_m, \tag{3}$$

gdzie b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ są różne liczby zbioru B, zaś w_i — liczby wymierne, różne od zera (jeżeli nie uważać za różne dwuch sum (3), różniących się tylko porządkiem składników.

Okażemy teraz, że każda liczba rzeczywista $x \neq 0$ daje się przedstawić w postaci (3).

Założmy dla dowodu, że tak nie jest i niech x_α oznacza pierwszą liczbę ciągu (1), nie dającą się przedstawić w postaci (3). Liczba x_α nie może należeć do B, gdyż każda liczba b zbioru B daje się przedstawić w postaci $b = 1 . b$, zatem w postaci (3). Z drugiej strony, z definicji zbioru B wynika, że skoro liczba x_α nie należy do B, to istnieje ciąg skończony $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ liczb porządkowych $< \alpha$, oraz ciąg liczb wymiernych $w_1, w_2, \ldots, w_n$, dla których zachodzi wzór (2). Z definicji liczby x_α wynika atoli, że każda z liczb x_{α_i} $(i=1, 2, \ldots, n)$, jako wcześniejsza w ciągu (1) od liczby x_α, daje się przedstawić w postaci (3): mamy więc, dla $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_{\alpha_i} = w_1^{(i)} b_1^{(i)} + w_2^{(i)} b_2^{(i)} + \ldots + w_{n_i}^{(i)} b_{n_i}^{(i)}, \tag{4}$$

gdzie $b_k^{(i)}$ są liczby zbioru B, zaś $w_k^{(i)}$ są liczby wymierne $\neq 0$. Wnosząc wzory (4) do wzoru (2), otrzymamy, po redukcji, dla liczby x_α wyrażenie postaci (3), wbrew założeniu, że x_α nie daje się przedstawić w tej postaci.

Dowiedliśmy więc istnienia zbioru liczb rzeczywistych B (tak zwanej *bazy* Hamela), mającego tę własność, że każda, różna od zera liczba rzeczywista x daje się, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci (3), gdzie b_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ są różne liczby bazy B, zaś w_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ są liczby wymierne $\neq 0$.

Niech teraz b_0 oznacza jakąkolwiek daną liczbę, należącą do bazy B. Określimy teraz funkcję zmiennej rzeczywistej $f(x)$, kładąc $f(x) = 0$ dla $x = 0$, oraz dla wszystkich tych liczb rzeczywistych x, dla których w rozwinięciu (3) nie figuruje liczba b_0. Jeżeli natomiast w rozwinięcie (3) liczby x wchodzi liczba b_0 ze współczynnikiem w, to położymy $f(x) = w$. Łatwo widzieć, że określona w ten sposób funkcja zmiennej rzeczywistej $f(x)$ spełnia dla wszelkich liczb rzeczywistych x i y równanie funkcyjne

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{5}$$

Funkcja nasza $f(x)$ nie jest atoli postaci Ax, gdyż $f(b_0) = 1$, zaś $f(b) = 0$ dla każdej liczby $b \neq b_0$ należącej do bazy B, zaś funkcja Ax, o ile nie jest stale zerem, staje się zerem tylko dla $x = 0$. Z istnienia bazy wynika więc istnienie nielinjowych rozwiązań równania funkcyjnego (5) [1]).

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZEJ.

---

[1]) Równaniu funkcyjnemu (5) poświęcono w ostatnich latach szereg prac: zob. np. *Fund. Math.* t. I, str. 116 i str. 123. Świeżo zastosował równanie (5) do rozkładu prostej na zbiory przystające prof. Ruziewicz (*Fund. Math.* t. V).

Skorowidz alfabetyczny.

[1]) Liczby oznaczają stronice.


3 0112 061600513